Institut Galilée, université Paris 13
L1, algèbre linéaire 2012/2013 deuxième semestre.

Indépendance linéaire et dimension: exercices à préparer

Exercice 1. Déterminer dans chacun des deux cas suivants, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, si la famille de l'espace vectoriel E est libre ou liée (respectivement si elle est génératrice)

$$\textbf{a)}\Big((0,-4,2),(-3,-3-4m,6+2m),(-3,m-7,6)\Big), \quad E=\mathbb{R}^3,$$
$$\textbf{b)}\Big((2+4m,1-5m,7,-1-3m),(-4,7,5,3),(-2,3,3,1)\Big), \quad E=\mathbb{R}^4.$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 2. Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une famille libre d'un espace vectoriel E. On pose:

$$\vec{u}'=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \quad \vec{v}'=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}, \quad \vec{w}'=2\vec{u}+\vec{v}.$$

Montrer que la famille $(\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}')$ est libre.

Exercice 3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par les systèmes (S_1), (S_2), (S_3) suivant

$$(S_1): 2x+y-z=0, \qquad (S_2): \begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ x-z=0 \\ x-6y+5z=0 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} 3x+3my+(13-8m)z=0 \\ x+my+(5-3m)z=0 \end{cases},$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 4. Décrire par une équation cartésienne (ou un système d'équations cartésiennes) chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Préciser la dimension de ces sous-espaces vectoriels.

$$E_1=\operatorname{vect}\Big((2,-1,1)\Big), \quad E_2=\operatorname{vect}\Big((1,1,1),(3,-1,1)\Big), \quad E_3=\operatorname{vect}\Big((-1,2,2,-1),(-3,1,-4,2)\Big).$$

Exercice 5. Montrer que chacune des deux familles suivante est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ dans cette base:

$$\mathcal{B}=\Big((-4,-1,-8),(3,1,8),(1,0,1)\Big),$$
$$\mathcal{C}=\Big((-1,-1,0),(-5,-4,-8),(1,1,1)\Big).$$

Exercice 6. On fixe un paramètre réel m et on considère le plan P de $\mathbb{R}^3$, d'équation $mx-y=0$ et la droite $D=\operatorname{vect}((m,4,1))$.

6.1. A quelle condition sur m le plan P et la droite D sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

6.2. On suppose la condition précédente vérifiée. Soit $\vec{u} = (0, 8 - 2m^2, 0)$. Trouver $\vec{v} \in P$ et $\vec{w} \in D$ tels que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 7. Soit

$$E = \{(x_j)_{j=1\dots 4} \in \mathbb{R}^4,\ \text{t.q. } 2x_1 - ax_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 = 0\}$$
$$F = \Big\{(x_j)_{j=1\dots 4} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } -x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 = 0\Big\},$$

où $a \in \mathbb{R}$. Donner, selon la valeur du paramètre a, les dimensions de E, F, $E \cap F$. En déduire la dimension de $E + F$. A quelles conditions sur a ces espaces sont-ils supplémentaires?

Exercice 8.

8.1. Déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^5$.

$$E_1 = \Big\{(x_j)_{j=1\dots 5},\ \text{t.q. } x_1 - x_2 + x_3 = 0\Big\}, \quad E_2 = \Big\{(x_j)_{j=1\dots 5},\ \text{t.q. } x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + 2x_4 = 0\Big\}$$
$$E_3 = \text{vect}\Big((1,1,2,0,4)\Big), \quad E_4 = \text{vect}\Big((0,0,1,2,3),(1,0,0,3,4)\Big).$$

8.2. Quels sont les couples d'espaces précédents qui sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$? On raisonnera d'abord sur les dimensions pour exclure le plus de couples possibles.

Exercice 9. Donner le rang des familles $\mathcal{F}_j$ de vecteurs suivantes. En extraire une base de $\text{Vect}\mathcal{F}_j$.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((-2,-4,-8),(-4,1,-7),(4,5,13)\Big), \quad \mathcal{F}_2 = \Big((-1,4,-5),(1,0,2),(2,-1,-3))\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((2,-3),(4,1),(0,2),(-1,7)\Big).$$

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{v}_1 = (6, 6 + 17a, -13 + 6a)$, $\vec{v}_2 = (2, 2 + 6a, -4 + 2a)$, $\vec{v}_3 = (-2, -2 - 7a, 11 - 4a)$, où a est un paramètre réel. Soit $E = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer la dimension de E suivant les valeurs de a.