Équations différentielles ordinaires. Cours CP2i 2024-2025

Thomas Duyckaerts.

Ces notes de cours sont en grande partie tirées de celles de Marion Darbas, qui a assuré ce cours les années précédentes. Ces notes sont provisoires, et seront mises à jour selon l'avancement du cours. N'hésitez pas à me contacter (duyckaer math.univ-paris13.fr) pour toute remarque ou question.

CHAPITRE I

Introduction. Existence et Unicité des solutions

1. Vocabulaire et définition

DÉFINITION 1.1. Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est ue relation de la forme

$$F(t, x(t), \ldots, x^{(m)}(t)) = 0 \tag{1.1}$$

liant la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et un nombre fini m de ses dérivées au points t.

- La variable t est prise dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (qui peut être $\mathbb{R}$ tout entier.
- La solution x, définie sur I, est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
- La fonction F est une fonction d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{m+1}$ dans l'espace $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$. On renvoie le lecteur à l'appendice A pour la définition d'un ouvert. Pour ce début de cours, le lecteur pourra remplacer "ouvert" par "sous-ensemble". Pour simplifier, on peut se limiter aux sous-ensembles de la forme $\Omega = J \times (\mathbb{R}^n)^{m+1}$ (J intervalle ouvert, c'est à dire de la forme $]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$), qui couvrent presque tous les exemples du cours.

Lorsque $n = N = 1$, l'équation est dite *scalaire*. Lorsque $N \geq 2$, on parle de *système différentiel*.

Une *solution* de (1.1) est donc une fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t \in I, \quad (t, x(t)) \in \Omega \text{ et (1.1) est vérifié.}$$

Lorsque la fonction F dépend effectivement de la dernière variable $x^{(m)}$, on dit que l'équation est *d'ordre* m.

Le mot "ordinaire" signifie ici que la fonction inconnue x ne dépend que d'une seule variable réelle. Lorsque l'inconnue est une fonction de plusieurs variables, et que les dérivées partielles de cette inconnue apparaissent dans l'équation, on parle d'*équations aux dérivées partielles*.

EXEMPLES 1.2. Les équations

$$x'(t) = 5x(t) \tag{1.2}$$

$$x^{(3)}(t) = 3tx(t) + t^2 \tag{1.3}$$

$$\cos\left(x''(t) + x(t) + t\right) = -1/x'(t) \tag{1.4}$$

sont des EDO scalaires, d'ordre respectivement 1, 3 et 2. Par exemple (1.2) peut s'écrire $f(t, x(t), x'(t)) = 0$ avec $F(t, x, y) = y - 5x$ défini pour $(t, x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^3$.

L'équation

$$\begin{cases} x_1'(t) = (x_2(t))^2 \\ x_2'(t) = (x_1(t))^3 + x_2(t). \end{cases} \tag{1.5}$$

est un système différentiel autonome non-linéaire.

Les fonctions $x(t) = ce^{5t}$, où x est une constante réelle, sont des solutions de (1.2). La fonction $x(t) = t/3$ est une solution de (1.3). La fonction $x(t) = -t$ est une solution de (1.4). La fonction constante égale à $(0,0)$ est une solution de (1.5).

Exercice 1.3. Écrire les équations (1.3) et (1.4) sous la forme (1.1).

Définition 1.4. L'EDO (1.1) est dite *autonome* quand la fonction F ne dépend pas de t. Une équation différentielle autonome est donc de la forme:

$$F\left(x(t), x'(t), \dots x^{(m)}(t)\right) = 0,$$

où F est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{N(m+1)}$ (par exemple sur $\mathbb{R}^{N(m+1)}$ tout entier.

Une EDO autonome autonome est invariante par translation en temps: si x est solution d'une telle équation et $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto x(t+t_0)$ est également solution de l'équation.

L'EDO (1.1) est dite *normale* lorsqu'elle s'écrit:

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t)),$$

où f est une fonction d'un ouvert Ω' de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exemples 1.5. L'équation (1.2) est autonome et normale. L'équation (1.3) est normale, mais pas autonome. L'équation (1.4) n'est ni normale, ni autonome.

Définition 1.6. L'EDO (1.1) est dite *linéaire homogène* lorsque pour tout t, l'application $(x_0, \dots, x_m) \mapsto F(t, x_0, \dots, x_m)$ est une application linéaire. Plus généralement, elle est dite *linéaire* quand cette application est affine, c'est à dire qu'il existe $b(t) \in \mathbb{R}^N$ telle que l'application

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto F(t, x_0, \dots, x_m) - b(t)$$

est linéaire.

Les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ pouvant s'écrire comme des multiplications matricielles, une EDO linéaire s'écrit donc:

$$A(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(m)}(t) \end{pmatrix} = b(t),$$

où A est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{N,(m+1)n}(\mathbb{R})$ (donc, à t fixé, A est une matrice $N \times (m+1)n$), et b est une application continue de I dans $\mathbb{R}^N$ (identifié à $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$). L'équation (ou le système) est homogène lorsque b est identiquement nul;

Exemples 1.7. L'équation (1.2) est linéaire homogène. L'équation (1.3) est linéaire. L'équation (1.4) et le système (1.5) ne sont pas linéaires.

2. Quelques mots sur la modélisation

Les équations différentielles permettent de modéliser de nombreux problèmes d'évolution, la variable t représentant le temps. On donne ici quelques exemples.

2.a. Dynamique des populations. Commençons par un cas très simple: l'équation

$$x'(t) = ax(t), \tag{2.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Cette équation exprime le fait que la variation de la quantité x est proportionnelle à la quantité x elle-même. Elle décrit par exemple l'évolution au cours du temps de la taille d'une population avec un taux d'accroissement constant a. On peut résoudre facilement cette équation: elle est équivalente à l'équation

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}x(t)) = 0.$$

Donc $e^{-at}x(t)$ est égal à sa valeur en un temps t_0, par exemple en $t = 0$. On obtient donc

$$x(t) = e^{ta}x(0). \tag{2.2}$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions de (2.1), paramétrées par leur valeur de x au temps initial $t = 0$. En revanche, si on fixe cette valeur, la solution est unique.

C'est Euler qui dans *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain (1760)*posa la question du calcul de la population d'une ville ou d'une province pour une certaine année. Si p_n définit la population à l'année n, Euler avait proposé la relation de récurrence $p_{n+1} = \lambda p_n$ (analogue discret de l'équation $x'(t) = ax(t)$). Ceci conduit à une suite géométrique de raison λ: $p_n = p_0\lambda^n$. D'après ces modèles, sans frein, une population augmente de façon exponentielle (quand le taux d'accroisement est positif, ce qui se traduit par $a > 0$ ou $\lambda > 1$). Ce modèle a été repris par l'économiste britannique Thomas Malthus en 1798, et on parle de *croissance mathusienne* en référence à ces travaux. L'hypothèse simpliste d'un taux de croissance proportionnel au nombre d'individus est assez peu réaliste en général, mais peut se révéler correcte pour des temps courts.

Vers 1840, le mathématicien belge Pierre François Verhulst propose de prendre en compte dans le modèle des taux de natalité et de mortalité qui sont des fonctions affines, respectivement décroissante et croissante, de la taille de la population. Ce modèle de croissance, auquel Verhulst a donné le nom de *logistique*, est un premier raffinement des modèles malthusiens. Dans ce nouveau modèle, le taux de croissance sature avec le nombre d'individus: la population ne peut pas atteindre une taille infinie, et décroît si elle dépasse une taille maximale dont la valeur dépend de l'environnement dans lequel évolue la population.

En notant $x(t)$ la population au temps t, $n(x) = n_1x + n_2$ le taux de natalité pour une population x (avec $n_1 < 0$ et $n_2 > 0$), et $m(x) = m_1x + m_2$ le taux de mortalité pour la population x (avec $m_1 > 0$, $m_2 > 0$), l'évolution de la population est décrite par l'équation

$$x'(t) = (n(x(t)) - m(x(t)))\, x(t),$$

c'est à dire

$$x'(t) = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \tag{2.3}$$

où $a = n_2 - m_2$, $k = \frac{n_2 - m_2}{m_1 - n_1}$. Dans le modèle de Verhulst, $a > 0$ (la population augmente quand elle est faible), et donc, puisque $m_1 > 0$ et $n_1 < 0$, $k > 0$. On voit que la population croît quand $x(t) < k$ et décroît quand $x(t) > k$. Le paramètre k est appelé “capacité d'accueil”.

L'équation (2.3) est normale, autonome, mais pas linéaire. Nous verrons bientôt comment trouver une solution explicite de (2.3).

En dynamique des populations, il existe des modèles plus complexes qui décrivent l'évolution des populations en interaction. Ils font appel à des systèmes différentiels. Mentionnons par exemple le modèle prédateur/proie de Lotka-Volterra et les modèles avec migration.

2.b. Modélisation d'une épidémie. Les équations différentielles peuvent également être utilisés pour modéliser des épidémies. Un des exemples les plus simples est le modèle *SIR* (Susceptible-Infected-Removed). C'est un modèle à compartiment: la population est divisée en 3 catégories:

- $S(t)$, le nombre de personnes saines, qui n'ont jamais été infectées, au temps t.
- $I(t)$, le nombre de personnes infectées au temps t.
- $R(t)$ le nombre de personnes “retirées” au temps t. Ce sont des personnes qui ont déjà attrapé la maladie, mais ne sont plus infectées (donc non contagieuses) et immunisées.

Le modèle SIR s'ecrit:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Le terme $S(t)I(t)$ représente le nombre de contacts entre personnes saines et personnes infectées. En notant le coefficient de transmission β, il y a $\beta S(t)I(t)$ nouvelles personnes infectées par unité de temps. Celles-ci se soustraient aux personnes saines (première équation) et s'ajoutent aux personnes infectées (deuxième équation). De même, parmi les personnes infectées, certaines vont guérir: γ étant le taux de guérison, il y a $\gamma I(t)$ personnes nouvellement guéries par unité de temps, qui s'enlèvent des personnes infectées (seconde équation) et s'ajoutent aux personnes immunisées (troisième équation). C'est un modèle simplifié pour lequel la population totale $N = S(t) + I(t) + R(t)$ est constante, ce qui se vérifie en dérivant N et en utilisant les 3 équations. Il existe des modèles plus complexes, pouvant tenir compte de la mortalité de l'épidémie, dans lesquels on peut inclure les taux de mortalités et de natalités, des durées d'incubation, etc...

Le système (2.4) est un système d'équations différentielles non -linéaire, autonome, normal. La solution générale de ce système n'est pas explicite.

2.c. Exemples issus de la physique.

Oscillateur harmonique. On s'intéresse aux oscillations simples (i.e. sans amortissement) d'un système masse-ressort. La masse est supposée ponctuelle et est accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal dont l'extrémité est fixe. Si l'expérimentateur écarte la masse légèrement de sa position d'équilibre et la relâche sans vitesse initiale, il constate que celle-ci se met à osciller autour de cette position d'équilibre. On note $x(t)$ la position du point M de masse m à l'instant t, en choisissant comme origine la position d'équilibre du ressort. On suppose que la force du rappel du ressort est proportionnel à son allongement: c'est la loi de Hooke, qui est une approximation raisonnable pour des petites déformations. En notant k le coefficient de proportionnalité (appelé *raideur du ressort*), on obtient l'équation suivante

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{2.5}$$

C'est une équation linéaire autonome du second ordre. On montrera que l'ensemble des solutions de (2.5) est

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.6}$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est appelé pulsation propre du système, et A et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales. Les oscillations du point M sont sinusoïdales d'amplitude A et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. L'oscillateur est qualifié d'*harmonique* car ses oscillations sont d'amplitude constante, et de période propre constante, ne dépendant que du système solide-ressort.

Pendule simple. On considère maintenant un pendule constitué d'une tige rigide de longueur ℓ. On note $\theta(t)$ l'angle du pendule par rapport à sa position initiale verticale. On néglige tous les frottements. L'angle $\theta(t)$ vérifie l'équation

$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)), \tag{2.7}$$

où g est l'accélération de la pesanteur. L'équation différentielle ordinaire (2.7) est une équation non-linéaire normale, autonome, du second ordre. Les solutions de (2.7) ne peuvent pas s'écrire explicitement à l'aide de fonctions usuelles (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles). Il est néanmoins possible de "résoudre" (2.7) en écrivant les solutions à l'aide d'une autre classe de fonctions, les fonctions elliptiques de Jacobi. On peut notamment montrer que pour des conditions initiales "pas trop grandes", les solutions de (2.7) oscillent avec une période qui dépend cette fois de la condition initiale.

3. Résultats d'existence et d'unicité

3.a. Préliminaires. Comme nous l'avons vu, il n'est pas toujours possible de "résoudre" une équation différentielle ordinaire, c'est à dire d'en donner des solutions explicites. Il est toutefois possible, dans un cadre assez général, de donner un résultat d'existence et d'unicité, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

DÉFINITION 3.1. Soit $m \geq 1$. On appellera *champ de vecteurs* (dépendant du temps) sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ une application continue

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R}^m \\ (t,x) &\mapsto f(t,x) \end{aligned}$$

REMARQUE 3.2. Le lecteur qui n'est pas familier avec la notion d'ouvert (définie dans l'appendice A) pourra remplacer dans la définition précédente (et dans toute la suite de cette partie) U par $J \times \mathbb{R}^m$, où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est à dire un intervalle de la forme $]a,b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

DÉFINITION 3.3. On dira qu'un champ de vecteurs f est *autonome* quand il ne dépend pas de la première variable t. Un champ de vecteur autonome est donc une application continue d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Pour simplifier et ne pas parler d'ouverts, on pourra considérer uniquement des champs de vecteurs définis sur l'ensemble $\mathbb{R}^m$ tout entier.

Nous allons nous intéresser à une équation différentielle normale d'ordre 1:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{3.1}$$

où f est un champ de vecteur. Ceci couvre aussi le cas des systèmes différentiels ($m \geq 2$). Si $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $f = (f_1, \dots, f_m)$, l'équation (3.1) s'écrit:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_m(t)) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_m'(t) = f_m(t, x_1(t), \dots, x_m(t)). \end{cases}$$

Le fait de ne considérer que des équations d'ordre 1 n'est en fait pas restrictif. Nous verrons plus loin comment ramener une équation d'ordre m à un système d'ordre 1.

Nous cherchons un théorème d'existence et d'unicité des solutions. Pour l'unicité, comme le montre l'exemple de l'équation d'ordre 1 $x'(t) = 0$, il faut prescrire une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^m$:

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.2}$$

où t_0 est le temps initial, et $(t_0, x_0) \in U$ (l'ouvert sur lequel f est définie). Si l'équation (3.1) modélise un phénomène physique, il doit effectivement y avoir une unique solution au problème (3.1) avec la condition initiale (3.2). L'étude de l'existence et l'unicité d'une équation différentielle avec donnée initiale est appelé problème de Cauchy:

Définition 3.4. Une solution du *problème de Cauchy* (3.1), (3.2) est une fonction $x : I \to \mathbb{R}^m$, de classe C^1, où I est un intervalle contenant t_0, telle que $x(t_0) = x_0$ et

$$\forall t \in I, \quad (t, x(t)) \in U \text{ et } x'(t) = f(t, x(t)).$$

On commence par considérer une classe d'équations pour lequel l'existence et d'unicité se montre facilement, en résolvant explicitant l'équation.

3.b. Le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1. On considère d'abord une équation de la forme:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{3.3}$$

où a, b sont des fonctions continues, à valeurs réelles, sur un intervalle I. On a donc $m = 1$, $f(t, x, x') = x' - a(t)x - b(t)$ définie pour $(t, x, x') \in U = I \times \mathbb{R}^2$. On prescrit une condition initiale:

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.4}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On commence par considérer le cas homogène:

Théorème 3.5. *Sous les hypothèses ci-dessus, lorsque $b(t) = 0$, l'équation* (3.2) *avec la condition initiale* (3.3) *admet une unique solution, donnée par*

$$x(t) = x_0 e^{A(t)}, \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds.$$

($A(t)$ est donc la primitive de a qui s'annule en t_0).

Démonstration. Soit x une solution de (3.3), (3.4). On pose $y(t) = e^{-A(t)}x(t)$. En utilisant (3.3), on obtient:

$$y'(t) = -A'(t)e^{-A(t)}x(t) + e^{-A(t)}x'(t) = 0.$$

On en déduit $y(t) = y(t_0) = x_0$ par (3.4) et donc $x(t) = e^{A(t)}x_0$, ce qui montre l'unicité de la solution.

Il reste à vérifier que la formule $x(t) = e^{A(t)}x_0$ définit bien une solution de (3.3), (3.4) ce qui est immédiat. □

Le cas $b(t) \neq 0$ n'est pas tellement plus compliqué. Soit $x(t)$ une solution de (3.3), (3.4). On pose encore $y(t) = e^{-A(t)}x(t)$. On a

$$y'(t) = (x'(t) - a(t)x(t))e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)},$$

soit en intégrant entre t_0 et t,

$$x(t) = e^{A(t)}x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}ds = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}ds. \tag{3.5}$$

Réciproquement, il est facile de vérifier que $x(t)$, défini par (3.5) est solution de (3.3), (3.4). On a obtenu:

Théorème 3.6. *Le problème* (3.3), (3.4) *admet une unique solution, définie sur I et donnée par la formule* (3.5).

Remarque 3.7. La solution générale de l'équation inhomogène (3.3) avec $b \neq 0$ est donnée par la somme d'une solution particulière de (3.3) et de l'équation homogène (3.3) avec $b = 0$.

Une variante du calcul précédent, qui permet de retrouver la formule (3.5), est la technique dite de "variation de la constante". On cherche une solution particulière de (3.3) de la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)},$$

où $e^{A(t)}$ est, comme vu précédemment, une solution de l'équation homogène. L'équation (3.3) est équivalente à $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$, soit $\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds + C$, où C est une constante. On obtient alors la formule $x(t) = Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)}ds$. La condition initiale (3.4) donne $C = x_0$.

Remarque 3.8. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 1. L'ensemble des solutions de l'équation inhomogène (b étant fixé) est un espace affine de dimension 1.

3.c. Fonctions lipschitzienne. On veut maintenant énoncer un théorème d'existence et d'unicité dans le cadre général de l'équation (3.1). On commence par donner un exemple qui montre que l'hypothèse "f continue" n'est pas suffisante pour assurer l'unicité de la solution. On considère le problème de Cauchy

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0. \tag{3.6}$$

Alors la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$, $x(t) = 0$ est solution. D'autres solutions sont donnée par les fonctions x_+ et x_- définies par:

$$x_+(t) = 0, \quad t < 0, \quad x(t) = t^2, \quad t \geq 0$$

et

$$x_-(t) = -t^2, \quad t < 0, \quad x_-(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Il y a en fait une infinité de solution: pour tout $t_0 > 0$, la fonction $t \mapsto x_+(t - t_0)$ est aussi solution de l'équation.

On définit maintenant une condition de régularité sur la fonction f, qui permettra d'assurer l'unicité de la solution.

DÉFINITION 3.9. Soit $m, n \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. La fonction f est dite k-lipschitzienne lorsque

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|. \tag{3.7}$$

La fonction f est dite *lipschitzienne* lorsqu'elle est k-lipschitzienne pour un certain k.

REMARQUE 3.10. On rappelle que sur un espace vectoriel de dimension finie, toute les normes sont équivalentes. La définition précédente dépend a priori du choix des normes sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. En utilisant l'équivalence des normes, on montre facilement que le fait d'être une fonction lipschitzienne ne dépend pas de ce choix. En revanche, la constante de Lipschitz k qui apparaît dans (3.7) peut en dépendre.

On prendre toujours la valeur absolue comme norme sur $\mathbb{R}$ (dans le cas $m = 1$ et/ou $n = 1$).

EXEMPLES 3.11. Une fonction linéaire $X \mapsto AX$, où A est une matrice $m \times n$ est lipschitzienne (exercice).

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'est pas lipschitzienne. En effet, on a, pour $x \neq 0$,

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \infty,$$

ce qui montre que cette quantité ne peut pas être bornée uniformément par une constante k.

EXERCICE 3.12. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue. Donner l'exemple d'une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas dérivable partout.

Pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions, on aura en fait besoin que le champ de vecteur f ne soit lipschitzien que par rapport à la variable x.

DÉFINITION 3.13. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (par exemple $U = J \times \mathbb{R}^n$, où J est un invervalle ouvert). Le champ de vecteur $f : U \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est dit *k-lipschitzien par rapport à x* (ou *par rapport à la deuxième variable*) lorsque

$$\forall (t, x, y), \quad (t, x) \in U \text{ et } (t, y) \in U \Longrightarrow \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|. \tag{3.8}$$

Le champ de vecteur f est dit *localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable* lorsque pour tout (t, x) de U, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si

$$K = \Big\{(s, y) \in U \text{ t.q. } |t - s| \leq \varepsilon \text{ et } \|x - y\| \leq \varepsilon\Big\},$$

alors $K \subset U$ et f est k-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur K.

REMARQUE 3.14. Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. En utilisant un argument de compacité, on peut montrer que si le champ de vecteur f est localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable, alors pour tout $R > 0$, pour tout c, d avec $a < c < d < b$, f est lipschitzien sur $]c, d[\times B(0, R)$, où

$$B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x\| < R\}.$$

Remarque 3.15. Pour un champ de vecteur autonome (donc ne dépendant pas de t), la définition 3.13 est toujours valable, mais la mention “par rapport à la deuxième variable” est bien sûr inutile.

Exemples 3.16. Le champ de vecteur défini par $f(t,x) = \sqrt{|t|}x$ sur $]-1,+1[\times\mathbb{R}$ est lipschitzien par rapport à la deuxième variable. Il n'est pas lipschitzien.

Le champ de vecteur autonome $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ est localement lipschitzien. Il n'est pas (globalement) lipschitzien.

On donne maintenant des conditions suffisantes simples pour qu'une fonction soit lipschitzienne.

Proposition 3.17. *Soit I un intervalle réel et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si $|g'|$ est bornée par une constante $k > 0$, alors g est k-lipschitzienne.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in I^2$, avec $x < y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x,y[$ tel que $g(x) - g(y) = g'(\xi)(x-y)$. Ceci donne comme annoncé $|g(x) - g(y)| \leq k|x-y|$. □

Corollaire 3.18. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Alors f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset U$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le compact K, elle est bornée sur K. Soit

$$k = \sup_{(t,x)\in K} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right|.$$

On déduit de la Proposition 3.17 que f est k-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. □

Mentionnons que le Corollaire 3.18 reste valable en dimension supérieure:

Corollaire 3.19. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f une application de classe C^1 sur U. Alors f est localement lipschitzienne.*

3.d. Lemme de Grönwall. On introduit ici un résultat important qui sera utilisé dans toute la suite de ce cours.

Lemme 3.20. *Soit $k, C > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $F : [a,b] \to [0,\infty[$ une fonction continue telle que*

$$\forall t \in]a,b], \quad F(t) \leq C + k\int_a^t F(s)ds. \tag{3.9}$$

Alors

$$\forall t \in]a,b], \quad F(t) \leq Ce^{k(t-a)}$$

Démonstration. Posons $G(t) = C + k\int_a^t F(s)ds$. Alors G est dérivable et

$$G'(t)) = kF(t) \leq kG(t)$$

par l'hypothèse (3.9). On peut réécrire cette inégalité:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tk}G(t)\right) \leq 0.$$

On en déduit

$$\forall t \in [a,b], \quad e^{-tk}G(t) \leq e^{-ak}G(a).$$

Donc

$$\forall t \in [a,b], \quad F(t) \leq G(t) \leq e^{(t-a)k} G(a) = C e^{(t-a)k},$$

ce qui est exactement l'inégalité annoncée. □

3.e. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

THÉORÈME 3.21. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f un champ de vecteur sur U, localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$ tel que le problème de Cauchy* (3.1), (3.2) *a une unique solution C^1 sur I.*

La preuve de théorème est omise. Nous en donnons quelques idées pour le lecteur/la lectrice intéressé·e. La première étape de la preuve est de remarquer que le problème de Cauchy (3.1), (3.2) est équivalent à l'équation suivante:

$$t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3.10}$$

On en déduit la propriété d'unicité suivante:

PROPOSITION 3.22. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f un champ de vecteur sur U, localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Soit x et y deux solutions du problème de Cauchy* (3.1), (3.2), *définies respectivement sur des intervalles ouverts I et I'. Alors*

$$\forall t \in I \cap I', \quad x(t) = y(t).$$

DÉMONSTRATION. la formule (3.10) montre:

$$\forall t \in I \cap I', \quad x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds.$$

En utilisant que f est localement lipschitzienne, on obtient une constante $k > 0$ telle que

$$\forall t \in I \cap I', \quad \|x(t) - y(t)\| \leq k \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| ds.$$

Le lemme de Grönwall donne alors $\|x(t) - y(t)\| \leq e^{k|t-t_0|} \|x(t_0) - y(t_0)\|$ pour $t \in I \cap I'$, ce qui montre que $x(t) = y(t)$ puisque cette égalité a lieu pour $t = t_0$. □

Le principe de la preuve de l'existence dans le théorème 3.21 est de montrer que l'application

$$\Phi : x \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

admet un point fixe x dans une boule d'un espace de fonctions bien choisi, ce qui donnera une solution x de (3.10) et donc du problème de Cauchy. L'existence de ce point fixe découle d'un théorème classique d'analyse fonctionnelle, le théorème de point fixe de Banach (malheureusement pas au programme de cette année). L'hypothèse que f est k-lipschitzienne permet de démontrer que Φ vérifie bien les hypothèses de ce théorème.

EXERCICE 3.23. Monter l'existence et l'unicité des solutions pour les problèmes de Cauchy associés à l'équation (2.3) et au système (2.4) qui apparaissent dans l'introduction.

3.f. Prolongement des solutions. Solution maximale. Le théorème 3.21 assure l'existence d'une solution locale au problème de Cauchy, c'est à dire une solution définie seulement pour des temps t proche de t_0. En itérant ce théorème, on peut prolonger cette solution. Pour ce faire, on introduit quelques définitions supplémentaires.

DÉFINITION 3.24. Soit $x(t)$, $t \in I$ et $\tilde{x}(t)$, $t \in \widetilde{I}$ deux solutions du problème de Cauchy (3.1), (3.2). On dit que la solution $\tilde{x}$ prolonge (ou est un prolongement de) x si

$$I \subset \widetilde{I} \quad \text{et } \forall t \in I, \quad x(t) = \tilde{x}(t).$$

Une *solution maximale* du problème de Cauchy est une solution de (3.1), (3.2) qui n'admet aucune autre solution comme prolongement.

Dans le théorème suivant, on suppose (pour simplifier) que le champ de vecteur f est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Mentionnons qu'un analogue de ce théorème est vrai dans le cas général.

THÉORÈME 3.25. *On suppose que f, t_0 et x_0 vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 3.21 avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy* (3.1), (3.2) *admet une unique solution maximale x, définie sur un intervalle $I_{\max} =]T_-, T_+[$, et vérifie*

$$T_+ < +\infty \Longrightarrow \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} T_+} \|x(t)\| = +\infty \tag{3.11}$$

$$T_- > -\infty \Longrightarrow \lim_{t \overset{>}{\longrightarrow} T_-} \|x(t)\| = +\infty. \tag{3.12}$$

Lorsque T_+ est fini, on dit que la solution *explose en temps fini* (positif). Lorsque $T_+ = +\infty$, on dit qu'elle est globale pour des temps positifs (ou dans le futur). Un vocabulaire analogue existe pour des temps négatifs (en remplaçant T_+ par T_- et "futur" par "passé"). Lorsque $I_{\max} = \mathbb{R}$ (i.e. lorsque la solution est globale pour des temps positifs et négatifs) on dit silmplement que la solution est globale.

La preuve du théorème 3.25 est donnée dans l'appendice B

EXEMPLE 3.26. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

est globale (cf la section précédente, où nous avons calculé cette solution.

EXEMPLE 3.27. On considère le problème de Cauchy:

$$x'(t) = x^2(t), \quad x(0) = x_0. \tag{3.13}$$

Soit x une solution maximale de ce problème, et $I_{\max}$ l'intervalle maximal d'existence. Remarquons d'abord que $x(t) = 0$ est la solution de (3.13) lorsque $x_0 = 0$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. On a alors $x(t) \neq 0$ pour tout t. Sinon la solution x coïnciderait en un point avec la solution nulle, et serait égale, par unicité, à cette solution nulle, contredisant l'hypothèse $x(t_0) = x_0 \neq 0$. Puisque $x(t) \neq 0$ pour tout t, on peut diviser par $x^2(t)$, et l'équation s'écrit

$$\forall t \in I_{\max}, \quad \frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1,$$

En d'autres termes,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{x(t)} = -1.$$

On en déduit

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - t,$$

où encore

$$\forall t \in I_{\max}, \quad x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}.$$

La solution x étant une solution maximale, $I_{\max}$ doit être le plus grand intervalle contenant 0 telle que la formule précédente ait un sens. Donc

- Si $x_0 > 0$, $I_{\max} =]-\infty, 1/x_0[$. La solution est globale dans le passé, mais explose en temps fini dans le futur.
- Si $x_0 < 0$, $I_{\max} =]1/x_0, +\infty[$. La solution est globale dans le futur, et explose en temps fini dans le passé.

Exercice 3.28. Etudier de la même manière le problème de Cauchy

$$x'(t) = x^3(t), \quad x(0) = x_0.$$

On donne maintenant une condition suffisante sur f pour que toutes les solutions soient globales:

Théorème 3.29 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global). *Soit f un champ de vecteur défini sur un ouvert de la forme $J \times \mathbb{R}^n$, où J est un intervalle ouvert, qui est k-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors toute solution maximale de l'équation différentielle* (3.1) *est définie sur J.*

Le théorème 3.29 est une conséquence des critères d'explosion 3.11, 3.12, et du Lemme de Grönwall. La démonstration est donnée dans l'Appendice C.

Soulignons la différence entre le théorème 3.29 et le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 3.21) vu précédemment. Dans le théorème 3.21, la fonction f est supposée *localement* lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Dans le théorème 3.29, f est supposée *globalement* lipschitzienne par rapport à la deuxième variable: la même constante de Lipschitz k peut-être utilisée sur tout le domaine de f.

Remarque 3.30. Par la proposition 3.17, si f est un champ de vecteur C^1 défini sur $J \times \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^n, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq k,$$

alors f est k-lipschitzien par rapport à x.

Exemple 3.31. On considère l'équation

$$x'(t) = \sin\big(x(t)\cos t\big). \tag{3.14}$$

Cette équation s'écrit $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = \sin(x\cos t)$. De plus

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = |(\cos t)\cos(x\cos t)| \leq 1.$$

Donc f est 1-lipschitzienne et, par le théorème 3.29, toute solution de (3.14) est globale.

3.g. Équations d'ordre supérieur. On considère maintenant une équation différentielle d'ordre $m \geq 2$:

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)), \tag{3.15}$$

où l'inconnue x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et f est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On va ramener l'équation (3.15) à une équation d'ordre 1, de la forme (3.1), en multipliant la dimension n de l'espace cible par m. On pose $X = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t))$. Si x est une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$, alors X est une fonction de I dans $\mathbb{R}^{mn}$. De plus, $X'(t) = (x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))$. La fonction x est solution de (3.15) si et seulement si $X'(t) = \big(x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t), f(t, X)\big)$, c'est à dire:

$$X'(t) = F(t, X), \tag{3.16}$$

où

$$F\left(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}\right) = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}, f\big(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}\big)\right). \tag{3.17}$$

Exercice 3.32. Vérifier que si f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, F est lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Exemple 3.33. Considérons l'équation linéaire scalaire d'ordre 2

$$x''(t) + a(t)x(t) + b(t) = 0. \tag{3.18}$$

Cette équation est équivalente à

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{3.19}$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$. L'équation (3.18) est *scalaire* mais d'ordre 2. En revanche, l'équation (3.19) est un *système*, mais seulement d'ordre 1.

Exercice 3.34. Écrire l'équation $x''(t) + 3x'(t) + \sin(t)x(t) = \cos(t)$ comme un système d'équation d'ordre 1 à 2 inconnues.

On remarque que prescrire une condition initiale $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^{nm}$ revient à prescrire une condition initiale

$$(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(m-1)}(t_0)) = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}). \tag{3.20}$$

Remarquons aussi que si I est un intervalle,

$$X \in C^1(I) \iff x \in C^{(m)}(I).$$

La résolution de l'EDO (3.15) avec la condition initiale (3.20) est encore appelée "problème de Cauchy". On déduit de cette manipulation et du théroème de Cauchy-Lipschitz pour les EDO d'ordre 1 la généralisation suivante:

Théorème 3.35. *Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(nm)}$ dans $\mathbb{R}^n$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in (\mathbb{R}^n)^m$, tels que $(t_0, X_0) \in U$. Alors il existe une unique solution $x \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ au problème de Cauchy* (3.15), (3.20).

Exercice 3.36. Montrer l'existence et l'unicité des solutions du problèmes de Cauchy associé au pendule simple (2.7). Montrer que les solutions maximales sont globales.

3.h. Application aux équations différentielles linéaires. Considérons l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in I, \tag{3.21}$$

où l'inconnue x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), I est un intervalle, $A \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$. On s'intéresse également au problème de Cauchy associé: (3.21) avec la condition initiale

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.22}$$

où le temps t_0 est fixé dans I, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. A (3.21), on associe l'équation linéaire homogène:

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{3.23}$$

Théorème 3.37. *Sous les hypothèse précédentes:*

(1) *Le problème de Cauchy* (3.21), (3.22) *admet une unique solution maximale, qui est définie sur I tout entier.*
(2) *L'ensemble des solutions S_h de* (3.23) *est un espace vectoriel de dimension n. L'application qui à x_0 associe la solution x de* (3.23), (3.22) *est un isomorphe de $\mathbb{K}^n$ dans S_h.*
(3) *L'ensemble des solutions de* (3.21) *est un espace affine de dimension n, de direction S_h. En d'autres termes, la solution générale de* (3.21) *est donnée par la somme d'une solution particulière de* (3.21) *et de la solution générale de* (3.23).

Démonstration. L'équation (3.21) s'écrit $x'(t) = f(t, x(t))$, avec

$$f(t, x) = A(t)x + b(t).$$

Notons $A(t) = [a_{i,j}(t)]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n}$. Puisque A est continue par hypothèse, les $a_{i,j}(t)$ sont continus. Ils sont donc bornés sur tout segment de I. On en déduit (cf feuille de TD 1) que pour tout segment $[c, d]$ de I, il existe k tel que

$$\forall t \in [c, d], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|A(t)x - A(t)y\| \leq k\|x - y\|.$$

Ceci montre que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, et donc que le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique à l'équation (3.21). On en déduit l'existence d'une solution au problème de Cauchy (3.21), (3.22). Par ailleurs, si $t_0 \in (c, d)$ et $[c, d] \subset I$, ce qui précède montre que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur (c, d). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz global, la solution x est définie sur $]c, d[$. Puisque c'est vrai pour tout segment $[c, d]$ inclus dans I, on en déduit que le problème de Cauchy (3.21), (3.22) admet une solution définie sur I.

Il est facile de vérifier que si x et y sont des solutions de (3.23), et λ et μ sont des nombres réels, alors $z = \lambda x + \mu y$ est une solution de (3.23), telle que $z(t_0) = \lambda x(t_0) + \mu y(t_0)$. L'ensemble S_h est donc bien un espace vectoriel, et l'application $x_0 \mapsto x$ (où x est la solution de (3.22), (3.23)) est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans S_h. Ce qui précède montre que cette application linéaire est bijective, et donc que S_h est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Ainsi, S_h est de dimension finie n.

Soit x_p une solution particulière de (3.21). On voit alors que x est solution de (3.21) si et seulement si $x - x_p$ est solution de (3.23), ce qui montre le point (3). $\square$

LEMME 3.38. *Soit* $(x_1, \ldots, x_j)$ *des solutions de l'équation homogène* (3.23) *sur* I. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *La famille de fonctions* $(x_k)_{1 \leq k \leq j}$ *est libre.*
(2) *Il existe* $t \in I$ *tel que la famille de* $(x_k(t))_{1 \leq k \leq j}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^n$.
(3) *Pour tout* $t \in I$, *la famille de* $(x_k(t))_{1 \leq k \leq j}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. (3) $\Longrightarrow$ (2) est immédiat.

Preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que la famille $(x_k(t_1))_{1 \leq k \leq j}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$. Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq k}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k = 0.$$

Ceci signifie

$$\forall t \in I, \quad \sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k(t) = 0.$$

En appliquant l'égalité précédente à $t = t_1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k(t_1) = 0,$$

et donc, la famille $(x_k(t_1))_{1 \leq k \leq j}$ étant libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_j = 0$, ce qui montre (1).

Preuve de (1) $\Longrightarrow$ (3).

Supposons que la famille de fonctions $(x_k)_{1 \leq k \leq j}$ est libre. On fixe $t_1 \in \mathbb{R}^n$, et on veut montrer que la famille $(x_k(t_1))_{1 \leq k \leq j}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$. Soit donc Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq k}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k(t_1) = 0.$$

La fonction $x = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k$ est une combinaison linéaire de solutions de (3.23). Par linéarité, c'est donc aussi une solution de (3.23). De plus, $x(t_1) = 0$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz (avec temps initial t_1), on en déduit

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k(t) = 0.$$

Cela signifie que la combinaison linéaire de fonctions $\sum_{k=1}^{j} \lambda_k x_k$ est nulle. Par (1), $\lambda_1 = \ldots = \lambda_j = 0$, ce qui conclut la preuve de (3). $\square$

REMARQUE 3.39. Les résultats précédents restent valables pour des fonctions à valeurs complexes, en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$. Les démonstrations sont identiques.

Appendice du chapitre I

Cette appendice regroupe des définitions de topologie et des démonstrations qui ne sont pas au programme de ce cours, mais pourraient intéresser certain·e·s lectrices et lecteurs. **Les étudiant·e·s ne seront pas évalué·e·s sur le contenu de cette appendice. Nous conseillons toutefois aux étudiant·e·s de CP2i qui se destinent à la spécialité MACS de les lire attentivement.**

A. Quelques notions de topologie sur $\mathbb{R}^n$: ouverts, fermés, compacts

Les notions de topologie résumée ici seront vues en détail lors du cours de mathématiques de S4. Nous renvoyons le lecteur à ce cours pour les démonstrations.

Soit $n \geq 1$. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on note $B(y, R)$ la boule ouverte de centre y et de rayon R.

$$B(y, R) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x - y\| < R\}.$$

DÉFINITION A.1. Un *ouvert* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \ \exists R > 0, \ B(x, R) \subset \Omega.$$

Cela signifie que si Ω est un ouvert et x est un point de Ω, tout point "assez proche" de x est également dans Ω.

EXEMPLE A.2. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE A.3. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$. La boule ouverte $B(y, R)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

En voici la démonstration. Soit $x \in B(y, R)$, alors $R' = R - \|x - y\| > 0$. On montre que $B(x, R') \subset B(y, R)$. En effet, si $z \in B(x, R')$, on a, par l'inégalité triangulaire

$$\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| < \|y - x\| + R' = R.$$

EXEMPLE A.4. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, c'est la boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$ de $\mathbb{R}$ (que l'on munit de la valeur absolue, qui est une norme sur $\mathbb{R}$).

EXERCICE A.5. En utilisant l'équivalence des normes, montrer que la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas du choix de la norme: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour une certaine norme, c'est encore un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour toute norme sur $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION A.6. *Une réunion d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouvert est un ouvert.*

La démonstration, qui est une simple application de la définition d'un ouvert, est laissée en exercice à la lectrice.

EXEMPLE A.7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. En effet ce sont des réunions d'ouverts:

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a - n, a[, \quad]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, a + n[.$$

DÉFINITION A.8. Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.

EXERCICE A.9. Montrer que les intervalles fermés sont les intervalles d'une des formes suivantes:

- $[a, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$;
- $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$;
- $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION A.10. *Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si il vérifie la propriété suivante: pour tout suite $(x_k)_k$ d'éléments de F, si $(x_k)_k$ a une limite x dans $\mathbb{R}^n$, alors $x \in F$.*

Définition A.11. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est dit *borné* s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Il découle bien entendu de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ que cette définition ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition A.12. Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est dit *compact* si de toute suite $(x_k)_k$ de point de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K.

Exercice A.13. Monter qu'un compact est fermé et borné.

Sur $\mathbb{R}^n$, la réciproque de cette propriété est vraie:

Théorème A.14. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermés bornés.*

Théorème A.15. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur K: il existe $(a, b) \in K^2$ tels que*

$$f(a) = \min_{x\in K} f(x), \quad f(b) = \max_{x\in K} f(x).$$

B. Construction de la solution maximale

On donne ici la preuve du théorème 3.25.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts I tels que $t_0 \in I$ et le problème de Cauchy (3.1), (3.2) admet une solution sur I. On pose $I_{\max} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$. Il est facile de vérifier que c'est un intervalle ouvert qui contient t_0.

Soit $t_1 \in I_{\max}$. Par définition $t_1 \in I$, où $I \in \mathcal{I}$. Il existe donc une solution $y(t)$ de (3.1), (3.2) sur I. On pose $x(t_1) = y(t_1)$. Par l'unicité (proposition 3.22), cette valeur ne dépend pas du choix de y. Ceci définit une fonction x sur $I_{\max}$. Dans la construction précédente, on peut choisir la même fonction y pour tout t_1 de I, et on a donc que $x(t)$ est une solution de (3.1), (3.2) sur I tout entier (en particulier $x(t_0) = x_0$). En appliquant ce raisonnement à tous les éléments t_1 de $I_{\max}$, on voit que x est bien une solution de (3.1) sur $I_{\max}$ tout entier. Par définition de $I_{\max}$, cette solution est maximale.

Notons $I_{\max} =]T_-, T_+[$. Il reste à montrer les critères d'explosion (3.11) et (3.12). Les démonstrations de ces deux propriétés sont identiques. Nous montrerons donc uniquement (3.11), que nous rappelons ici:

$$T_+ < +\infty \Longrightarrow \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} T_+} \|x(t)\| = +\infty. \tag{B.1}$$

On montre (B.1) par l'absurde. Supposons que c'est faux, c'est à dire qu'il existe une suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $]T_-, T_+[$ telle que $\lim_{p\to\infty} T_p = T_+$ et la suite $\left(\|x(T_p)\|\right)_p$ reste bornée. De toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une suite convergente. On extrait de $(T_p)_p$ une suite $(t_N)_{N\in\mathbb{N}} = (T_{p_N})_{N\in\mathbb{N}}$ telle que $x(T_N)$ converge, quand $N \to \infty$, vers un élément x_+ de $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$\lim_{N\to\infty} t_N = T_+ \text{ et } \lim_{N\to\infty} x(t_N) = x_+. \tag{B.2}$$

On considère une solution $\tilde{x}$ au problème de Cauchy

$$\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(T_+) = x_+,$$

donnée par le théorème de Cauchy-Lipsichitz. Elle est définie sur un intervalle $]\tilde{T}_-, \tilde{T}_+[$ avec $\tilde{T}_- < T_+ < \tilde{T}_+$. Soit y la fonction définie par

$$\begin{cases} y(t) = x(t) & \text{si } t \in]T_-, T_+[\\ y(t) = \tilde{x}(t) & \text{si } t \in [T_+, \tilde{T}_+[. \end{cases}$$

On va montrer que y est une solution du problème de Cauchy (3.1), (3.2). Puisque y prolonge x, ceci contredirait la maximalité de x, concluant la preuve. Pour cela, on se donne une constante de Lipschitz k telle que:

$$\text{(B.3)} \qquad \forall t \in [T_-, \tilde{T}_+], \quad \forall (X,Y) \in \overline{B}(x_+, 1), \ \|f(t,X) - f(t,Y)\| \leq k\|X - Y\|,$$

où on a noté $\overline{B}(x_+, 1) = \{X \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } \|X - x_+\| \leq 1\}$.

Soit $T < T_+$ proche de T_+, tel que $T > \tilde{T}_-$, $\|\tilde{x}(t) - x_+\| \leq 1/10$ pour $t \in [T, T_+]$ et $e^{k|T-T_+|} \leq 11/10$. On fixe N grand, tel que $\|x_+ - x(t_N)\| \leq 1/10$. On va montrer,

$$\text{(B.4)} \qquad \forall t \in [T, T_+[, \quad \|x(t) - x_+\| < 1.$$

On raisonne par l'absurde. Si (B.4) est faux, on peut trouver, par le théorème des valeurs intermédiaires, un intervalle $I_N \subset [T, T_+[$ tel que $t_N \in I_N$ et

$$\text{(B.5)} \qquad \sup_{t \in I_N} \|x(t) - x_+\| = 1.$$

En écrivant

$$x(t) = x(t_N) + \int_{t_N}^t f(s, x(s))ds, \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_N) + \int_{t_N}^t f(s, \tilde{x}(s))ds$$

on obtient, pour $t \in I_N$,

$$\text{(B.6)} \qquad \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x(t_N) - \tilde{x}(t_n)\| + k \left| \int_{t_n}^t \|x(s) - \tilde{x}(s)\| ds \right|.$$

Remarquons que (B.6) implique, par le lemme de Grönwall, pour tout t dans un intervalle I_N:

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq e^{k|T-t_N|}\|x(t_N) - \tilde{x}(t_N)\| \leq \frac{11}{10} \times (\|x(t_N) - x_+\| + \|\tilde{x}(t_N) - x_+\|) \leq \frac{22}{100}.$$

Par l'inégalité triangulaire, et en utilisant que $\|x(t) - x_+\| \leq 1/10$ pour $t \in [T, T_+]$, on en déduit

$$\forall t \in I_N, \quad \|x(t) - x_+\| \leq \frac{32}{100} \leq \frac{1}{2}.$$

Ceci contredit (B.5), concluant la preuve de (B.4).

Puisque (B.4) est vrai, on peut refaire les calculs précédents en remplaçant l'intervalle I_N par $[T, T_+[$. On en déduit que pour N grand, et pour $T \leq t < T_+$,

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x(t_N) - \tilde{x}(t_N)\| e^{k|t-T_N|}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $x(t) = \tilde{x}(t)$ pour $t \in [T, T_+[$, ce qui conclut la preuve. $\square$

C. Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

On suppose $t_0 = 0$ et $J = \mathbb{R}$ pour fixer les idées. Considérons une solution maximale de (3.1), avec une condition initiale (3.2), définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$. On veut montrer que $T_+ = +\infty$ et $T_- = -\infty$. On se concentre sur la démonstration de l'égalité $T_+ = +\infty$ (celle de l'autre inégalité est identique). On raisonne par l'absurde, en supposant que T_+ est fini. On a alors, pour $0 < t < T_+$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds = x_0 + \int_0^t \left(f(s, x(s)) - f(s, x_0)\right) ds + \int_0^t f(s, x_0)ds.$$

On en déduit:

$$\|x(t) - x_0\| \le \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\|ds + \int_0^{T_+} |f(s, x_0)|ds.$$

Puisque f est k lipschitzienne, on obtient, en notant $M = \int_0^{T_+} |f(s, x_0)|ds$,

$$\|x(t) - x_0\| \le k \int_0^t \|x(s) - x_0\|ds + M.$$

Par le lemme de Grönwall, on en déduit, pour $t \in [0, T_+[$:

$$\|x(t) - x_0\| \le Me^{kt},$$

ce qui contredit le critère d'explosion (3.11). $\square$

CHAPITRE II

Quelques exemples de résolutions explicites

Dans ce second chapitre, nous allons aborder la théorie quantitative qui consiste à calculer la forme explicite de certaines classes d'équations différentielles.

II.1. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On explique ici comment résoudre explicitement, à l'aide de la théorie de la réduction des endomorphisme, des systèmes linéaires à coefficients constants. On commence par le cas homogène, puis on décrit la méthode de variation de la constante utile pour le cas inhomogène. La théorie de la réduction des endomorphismes est plus complète sur $\mathbb{C}$ que sur $\mathbb{R}$. On considère donc aussi le cas de solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Pour cela, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans toute cette partie.

Nous incitons la lectrice ou le lecteur à relire son cours de début d'année sur la réduction des endomorphismes pour se rafraîchir la mémoire.

Comme nous l'avons déjà fait auparavant, nous identifierons dans toutes cette partie $\mathbb{K}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des vecteurs colonnes à n éléments sur $\mathbb{K}$.

1.a. Systèmes différentiels linéaires homogènes. On considère ici le système différentiel linéaire homogène:

$$x'(t) = Ax(t), \tag{II.1.1}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices carrés $n \times n$), avec éventuellement une condition initiale

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{K}^n, \tag{II.1.2}$$

où on a pris le temps initial 0 pour simplifier les formules. On rappelle (§3.h du Chapitre I) que l'ensemble des solutions de (II.1.1) est un espace vectoriel de dimension n et que toutes les solutions maximales de (II.1.1) sont globales. On peut calculer ces solutions en utilisant la théorie des endomorphismes, lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable. Remarquons qu'une matrice A est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$, il peut être intéressant de considérer artificiellement (II.1.1) comme un problème complexe, d'inconnue $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, pour trouver une formule explicite des solutions.

Cas des matrices diagonalisables. Supposons d'abord A diagonalisable. Cela signifie qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_n)$ formée de vecteurs propres de A. On a donc $Au_j = \lambda_j u_j$ pour $j = 1, \dots, n$ où $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ est l'ensemble des valeurs propres de A, comptées avec leurs ordres de multiplicités.

Soit $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ et $y(t) = (y_j(t))_{1 \leq j \leq n}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. En notant P la matrice de passage de la base $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on sait que

$$y(t) = Px(t).$$

Ceci montre que $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$. On peut donc dériver les y_j.

On a $x(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t) u_j$. Donc d'une part, x est une solution de (II.1.1) si et seulement si:

$$x'(t) = Ax(t) = A \sum_{j=1}^n y_j(t) u_j = \sum_{j=1}^n y_j(t) A u_j = \sum_{j=1}^n y_j(t) \lambda_j u_j,$$

d'autre part

$$x'(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j'(t) u_j.$$

En identifiant les coordonnées de $x_j'(t)$ dans la base $(u_j)_j$, on obtient que x est solution de (II.1.1) si et seulement si:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad y_j'(t) = \lambda_j u_j.$$

On sait résoudre ces équations (cf §3.b du Chapitre I). Les solutions sont données par $y_j(t) = y_j(0) e^{\lambda_j t}$. La solution de (II.1.1), (II.1.2) est donc donnée par

$$x(t) = \sum_{j=1}^n y_j(0) e^{\lambda_j t} u_j,$$

où les $y_j(0)$ sont les coordonnés de $x(0) = x_0$ dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice II.1.1. Résoudre le système (II.1.1) lorsque $n = 2$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice II.1.2. Résoudre le système (II.1.1) lorsque $n = 2$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On commencera pas chercher les solutions complexes, puis on déterminera les solutions réelles.

Cas des matrices triangulaires supérieures. Lorsque A est trigonalisable, l'utilisation d'une base de trigonalisation permet également de résoudre le système (II.1.1). Supposons d'abord A triangulaire supérieure, i.e. $A = [a_{i,j}]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n}$ avec $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$. La famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} = (a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est la famille des valeurs propres de A, comptées avec leur ordre de multiplicité. En notant $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, on obtient que (II.1.1) est équivalent aux équations différentielles:

$$x_i'(t) = \sum_{j=i}^n a_{i,j} x_j(t).$$

L'équation correspondant à $i = n$ est une équation différentielle ordinaire sur $x_n(t)$:

$$x_n'(t) = \lambda_n x_n(t),$$

que l'on peut résoudre directement. L'équation correspondant à $i = n - 1$ est:

$$x_{n-1}'(t) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + a_{n-1,n} x_n(t),$$

que l'on peut aussi résoudre, $x_n(t)$ étant connu. On résout ensuite successivement les autres équations en remontant les indices $i = n - 2$, $i = n - 3$, jusqu'à $i = 1$, la connaissance de $x_{i+1}, \ldots, x_n$ et l'équation différentielle vérifiée par x_i permettant de calculer x_i.

Lorsque A est trigonalisable, la méthode précédente fonctionne encore en considérant les coordonnées $(y_j(t))_{1 \leq j \leq n}$ dans une base de trigonalisation. Donnons un exemple simple pour illustrer cette technique. On suppose $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et qu'il existe une base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$Au_1 = u_1, \quad Au_2 = u_1 + u_2.$$

En d'autres termes, la matrice de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ est la matrice triangulaire supérieure $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On note $y_1(t)$, $y_2(t)$ les coordonnées de $x(t)$ dans la base (u_1, u_2). On a donc

$$x(t) = y_1(t)u_1 + y_2(t)u_2, \quad x'(t) = y_1'(t)u_1 + y_2'(t)u_2.$$

L'équation (II.1.1) est donc équivalente à

$$y_1'(t)u_1 + y_2'(t)u_2 = A(y_1(t)u_1 + y_2(t)u_2) = y_1(t)u_1 + y_2(t)(u_1 + u_2).$$

En identifiant les coordonnées dans la base (u_1, u_2), on obtient

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $y_2(t) = y_2(0)e^t$. La première équation s'écrit donc

$$y_1'(t) = y_1(t) + y_2(0)e^t.$$

Par la formule (3.5) du Chapitre I, ou la méthode de variation de la constante, on obtient

$$y_1(t) = y_2(0)te^t + y_1(0)e^t.$$

La solution de (II.1.1) dans ce cas est donc

$$x(t) = (y_2(0)te^t + y_1(0)e^t)u_1 + y_2(0)e^t u_2,$$

ou $(y_1(0), y_2(0))$ sont les coordonnées de $x(0)$ dans la base (u_1, u_2).

1.b. Méthode de la variation de la constante. On considère maintenant un système linéaire non homogène

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \tag{II.1.3}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $b \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$, et J est un intervalle réel. On rappelle (cf Théorème 3.37 du Chapitre I) que la solution générale de (II.1.3) est la somme d'une solution particulière de (II.1.3) et de la solution générale du système linéaire homogène II.1.1. Pour trouver une solution particulière de (II.1.3), on utilise la *méthode de variation de la constante* qui généralise la méthode de variation de la constante du cas scalaire.

Supposons que l'on ait une base de solution $(u_1, \dots, u_n)$ dy système homogène (II.1.1). On rappelle que cela implique que pour tout t de $\mathbb{R}$, $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ est une base de $\mathbb{C}^n$. On cherche une solution particulière de (II.1.3) en déterminant ses coordonnées dans cette base, soit:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)u_j(t).$$

On a

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t)u_j(t) + \alpha_j(t)u_j'(t)$$

et

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) A u_j(t).$$

Puisque les u_j sont solutions du systèmes homogènes (ce qui signifie $u_j'(t) = Au_j(t)$), on en déduit

$$x'(t) - Ax(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t) u_j(t).$$

En particulier, x est solution de (II.1.3) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t) u_j(t) = b(t). \tag{II.1.4}$$

Ceci donne, pour tout t, un système de Cramer d'inconnues $\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t)$. On peut par exemple écrire: $\sum_{j=1}^{n} \beta_j(t) u_j(t)$, où $(\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ sont les coordonnées de b dans la base $(u_j(t))_{1 \leq j \leq n}$, et (II.1.4) montre que x est solution de (II.1.3) si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \alpha_j'(t) = \beta_j(t),$$

ce qui permet, en intégrant les équations précédentes, de trouver une solution particulière de (II.1.3).

Exemple II.1.3. Fixons une fonction continue $t \mapsto c(t)$ sur $\mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière du système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + c(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t), \end{cases} \tag{II.1.5}$$

qui s'écrit, avec $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

$$x'(t) = Ax(t) + \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{II.1.6}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable, ses deux valeurs propres sont $\lambda_\pm = 1 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $u_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. Une base de solutions de l'équation homogène $x'(t) = Ax(t)$ est donnée par (U_-, U_+), où

$$U_\pm(t) = e^{(1\pm i)t} u_\pm.$$

On cherche donc une solution de (II.1.6) de la forme

$$x(t) = \alpha_+(t) U_+ + \alpha_-(t) U_-.$$

Le calcul fait précédemment (cf (II.1.4)) montre que x est solution si et seulement si

$$\alpha_+'(t) U_+ + \alpha_-'(t) U_- = \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} \alpha_+'(t) e^{(1+i)t} + \alpha_-'(t) e^{(1-i)t} = c(t) \\ i\alpha_+'(t) e^{(1+i)t} - i\alpha_-'(t) e^{(1-i)t} = 0, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \alpha_+'(t) e^{it} + \alpha_-'(t) e^{-it} = e^{-t} c(t) \\ \alpha_+'(t) e^{it} - \alpha_-'(t) e^{-it} = 0, \end{cases}$$

La résolution de ce système montre qu'il est équivalent aux deux équations $\alpha'_+(t) = \frac{1}{2}e^{-it-t}c(t)$ et $\alpha'_-(t) = \frac{1}{2}e^{it-t}c(t)$. Une solution particulière de (II.1.6) est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{(1+i)t}\int_0^t e^{-is-s}c(s)ds\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{(1-i)t}\int_0^t e^{is-s}c(s)ds\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}. \tag{II.1.7}$$

Pendant la séance de travaux dirigés, nous avions supposé $c(t) = e^t$. Dans ce cas, la formule (II.1.7) est $\begin{pmatrix}0\\ -e^t\end{pmatrix} - e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$. La solution particulière trouvée en travaux dirigés était[1] $\begin{pmatrix}0\\ -e^t\end{pmatrix}$. , ce qui est cohérent, la différence entre ces deux fonctions étant une solution de l'équation homogène $x'(t) = Ax(t)$.

1.c. Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre supérieur. On considère maintenant une équation différentielle de la forme

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)}(t) = 0, \tag{II.1.8}$$

où l'inconnue x est à valeur complexe (i.e. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), et les a_j sont des éléments de $\mathbb{C}$. Ceci englobe bien sûr le cas où les coefficients a_j sont réels.

En posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

on obtient que l'équation (II.1.8) est équivalente au système différentiel (II.1.1), avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée "matrice compagnon" du polynôme

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j.$$

On peut montrer que le polynôme caractéristique de A est exactement $(-1)^n\chi_A$. Les valeurs propres de A sont donc les racines de χ_A, avec les mêmes ordres de multiplicité. On note $\sigma(A)$ l'ensemble de ces valeurs propres (le spectre de A). On montre:

THÉORÈME II.1.4. *(1) Soit λ une racine de χ_A, d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$, $j \in \{0, \ldots, m(\lambda) - 1\}$. Alors $x_{j,\lambda}(t) = t^j e^{\lambda t}$ est une solution de* (II.1.8).

(2) La famille $(x_{j,\lambda})_{j,\lambda}$, où $\lambda \in \sigma(A)$ et $j \in \{0, \ldots, m(\lambda) - 1\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (II.1.8).

[1] Avec une faute de signe?

Idée de la preuve. On vérifie par le calcul que les $x_{j,\lambda}$ sont solutions. Pour montrer que la famille ainsi définie est une base de l'espace vectoriel des solutions, on commence par remarquer que cette famille comporte exactement n éléments (le nombre de zéros du polynôme complexe χ_A, comptés avec leurs ordres de multiplicité). Il reste à vérifier que la famille $x_{\lambda,j}$ est libre. □

Exercice II.1.5 (Difficile). Montrer que la famille $(x_{j,\lambda})_{j\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre.

Nous donnons maintenant la version 2 dimensionnelle du théorème II.1.4, avec une preuve complète:

Théorème II.1.6. *On considère l'équation différentielle sur* $\mathbb{C}$*:*

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0, \tag{II.1.9}$$

où $(a_1, a_0) \in \mathbb{C}^2$*. Soit* P *le trinôme du second degré* $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$*. Alors*

- *Si* P *a deux racines distinctes* λ_1 *et* λ_2*, l'espace vectoriel des solutions de* (II.1.9) *a pour base la famille formée par les deux fonctions* $e_{\lambda_j} : t \mapsto e^{\lambda_j t}$*,* $j = 1, 2$*.*
- *Si* P *a une seule racine double* λ*, l'espace vectoriel des solutions de* (II.1.9) *a pour base la famille* (e_λ, f_λ)*, où* $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ *et* $f_\lambda(t) = te^{\lambda t}$*.*

Démonstration. Il suffit de vérifier, dans chaque cas, que les deux fonctions proposées sont bien solutions de l'équation et qu'elles sont indépendantes.

Premier cas: le discriminant de P est non nul. P a deux racines simples distinctes λ_1 et λ_2. On a $e'_{\lambda_j} = \lambda_j e_{\lambda_j}$, $e''_{\lambda_j} = \lambda_j^2 e_{\lambda_j}$. Donc pour $j \in \{1, 2\}$,

$$e''_{\lambda_j} + a_1 e'_{\lambda_j} + a_0 e_{\lambda_j} = P(\lambda_j) e_{\lambda_j} = 0,$$

car λ_j est racine de P. Les deux fonctions e_{λ_1} et e_{λ_2} sont donc solutions de (II.1.9). On sait que l'ensemble des solutions de (II.1.9) est un espace vectoriel de dimension 2. Pour montrer que $(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2})$ est une base, il reste à vérifier que ces deux fonctions sont indépendantes. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\alpha_1 e_{\lambda_1} + \alpha_2 e_{\lambda_2} = 0$. Ceci signifie:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0.$$

En dérivant, on obtient:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0.$$

En considérant les deux égalités précédentes en $t = 0$, on en déduit

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0.$$

La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, de déterminant $\lambda_2 - \lambda_1$, étant inversible, on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ce qui conclut la preuve dans ce cas.

Deuxième cas: le discriminant de P est nul. P a donc une racine double $\lambda = -a_1/2$. On a donc $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$. Par le calcul précédent, e_λ est solution de (II.1.9). On vérifie que $f_\lambda(t) = te^{\lambda t}$ est aussi solution. On a $f'_\lambda(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}$, $f''_\lambda(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t}$. Donc

$$f''_\lambda(t) + a_1 f'_\lambda(t) + a_2 f_\lambda(t) = tP(\lambda)e^{\lambda t} + (2\lambda + a_1)e^{\lambda t}.$$

On remarque que $2\lambda + a_1 = 0$ car $\lambda = -a_1/2$. Donc f_λ est bien solution de (II.1.9).

Il reste à montrer que (e_λ, f_λ) est une famille libre. Soit (α, β) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha e_\lambda(t) + \beta f_\lambda(t) = 0.$$

En appliquant l'égalité précédente en $t = 0$, on obtient $\alpha = 0$. On a donc que βf_λ est identiquement nul, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$. Ceci conclut la preuve du théorème. □

Exercice II.1.7. Résoudre l'équation du ressort non amorti présentée dans l'introduction (où $\omega^2 = k/m$ avec les notations de cette introduction).

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Résoudre l'équation du ressort amorti:

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

où $\lambda > 0$ est un coefficient d'amortissement.

La méthode de variation de la constante peut s'employer pour une équation différentielle d'ordre supérieure à deux. Il est important dans ce cas d'interpréter l'équation comme une équation vectorielle d'ordre 1. La méthode de la partie 1.b s'applique alors telle quelle.

II.2. Equations à variables séparables

Les équations dites à variables séparables (ou séparées) s'écrivent sous la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)) = g(t)h(x) \tag{II.2.1}$$

avec $g : J \to \mathbb{R}$, continue, et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Ici J est un intervalle réel.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour deux réels $t_0 \in J$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution locale $x = x(t)$ définie sur un certain intervalle $I \subset J$ telle que $x(t_0) = x_0$.

Exercice II.2.1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique bien dans le cadre précédent.

2.a. Solutions constantes. On observe que si la fonction h s'annule en un point $x^* \in \mathbb{R}$ et $x(t) = x^*$, alors $x'(t) = 0$. La fonction constante $x(t) = x^*$ est donc une solution de (II.2.1). Ainsi, à chaque racine de l'équation $h(x) = 0$, correspond une solution constante.

Exemple II.2.2. L'équation $x'(t) = t(x^2 - 1)$ est à variables séparables avec les fonctions $g(t) = t$ et $h(x) = x^2 - 1$. Elle admet les deux solutions constantes $x_1(t) = -1$ et $x_2(t) = 1$. Graphiquement, ces solutions ont pour graphes des droites horizontales.

2.b. Solutions non constantes. Par unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, une solution non constante ne peut prendre aucune valeur x^* telle que $h(x^*) = 0$. En effet, si $h(x^*) = 0$, alors la fonction constante $x(t) = x^*$ est une solution. Si une autre solution y est telle que $y(t^*) = x^*$ pour un certain t^*, alors on aurait $x(t^*) = x^* = y(t^*)$ et ceci contredit l'unicité.

Soit x une solution non constante définie sur un intervalle I. D'après la remarque ci-dessus,

$$\forall t \in I, \quad h(x(t)) \neq 0.$$

On peut écrire l'équation (II.2.1) sous la forme

$$\frac{x'(t)}{h(x)} = g(t),$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = g(t),$$

où H est une primitive de $1/h$ définie par:

$$H(x) = \int_{x(t_0)}^{x} \frac{dy}{h(y)},$$

t_0 étant fixé dans I. Par intégration, on obtient

$$H(x(t)) = G(t), \tag{II.2.2}$$

où $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. La solution est donc définie implicitement. On remarque que puisque h ne s'annule pas sur le domaine $x(I) = \{x(t),\ t \in I\}$ (où I est l'intervalle maximal d'existence de x), elle ne change pas de signe (par le théorème des valeurs intermédiaires). La fonction H est donc monotone sur cet ensemble. En utilisant la fonction réciproque H^{-1} de H sur $x(I)$, on peut calculer $x(t)$ à partir de (II.2.2). En pratique, si l'on veut une solution explicite, il faut une formule explicite pour H^{-1}.

Exemple II.2.3. Considérons l'équation $x'(t) = tx^2(t)$, avec condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $x(t) = 0$ est une solution constante. Les autres solutions ne s'annulent donc jamais et $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Une solution non constante vérifie donc $x_0 \neq 0$ et

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t$$

et donc (en intégrant et en utilisant la condition initiale $x(0) = x_0$), $-\dfrac{1}{x(t)} = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{x_0}$. Les solutions sont donc données par

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{t^2}{2}},$$

et sont définies sur $I =]-T, T[$, où $T = \sqrt{\frac{2}{x_0}}$.

Exercice II.2.4. Résoudre le modèle de croissance logistique (cf (2.3) dans l'introduction):

$$x'(t) = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right),$$

où $k > 0$.

II.3. Changements de fonction inconnue dans les équations différentielles

Si l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ n'appartient pas à un type d'équations résolubles, on peut réaliser un changement de fonction inconnue pour se ramener à un type d'équation connue.

On pose $x(t) = h(y(t))$ avec h une fonction dérivable. On a $x'(t) = h'(y(t))y'(t)$. En remplaçant dans l'équation initiale, on obtient une nouvelle équation différentielle d'inconnue $y = y(t)$

$$h'(y(t))y'(t) = f(t, h(y(t))).$$

Si $h'(y(t)) \neq 0$, on peut écrire

$$y'(t) = \frac{f(t, h(y(t)))}{h'(y(t))}.$$

En choisissant bien la fonction h, on peut parfois obtenir une équation différentielle en y que l'on sait résoudre explicitement. Il n'existe pas de méthode générale pour trouver une telle fonction h. On peut cependant en donner quelques exemples.

3.a. Equations de Bernoulli. Les équations de Bernoulli sont non linéaires de la forme

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^{\alpha} \tag{II.3.1}$$

avec a et b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \{0, 1\}$, alors l'équation (II.3.1) est une équation linéaire du premier ordre et on sait la résoudre. On considère le cas $\alpha \notin \{0, 1\}$. Si $\alpha > 0$, on remarque que la fonction nulle est solution de l'équation. Pour calculer les solutions non nulles avec $\alpha \notin \{0, 1\}$, on fait le changement de fonction

$$y(t) = x(t)^{1-\alpha}.$$

En dérivant, on obtient

$$y'(t) = (1-\alpha)x'(t)x(t)^{-\alpha} = (1-\alpha)(a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t))$$

soit

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t)$$

qui est une équation différentielle linéaire.

Exemple II.3.1. L'équation

$$x'(t) = tx(t) + x(t)^3$$

est une équation de Bernouilli. La solution nulle est solution. Si maintenant $x(t)$ est une solution du problème de Cauchy correspondant avec $x(t) = x_0 \neq 0$, on sait que x ne s'annule pas. On peut donc faire le changement de fonction inconnue $y(t) = x(t)^{-2}$. On obtient l'équation

$$y'(t) = -2ty(t) - 2,$$

que l'on peut résoudre explicitement.

Exemple II.3.2. Considérons l'équation de Bernoulli

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2t} + \frac{1}{2tx(t)}, \ t > 0, \tag{II.3.2}$$

avec donnée initiale en $t = 1$:

$$x(1) = x_1. \tag{II.3.3}$$

On a $\alpha = -1$ et on pose donc le changement de fonction $y(t) = x^2(t)$. On arrive à

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \frac{1}{t}.$$

La solution générale de cette équation linéaire sur $I =]0, +\infty[$ est $y(t) = Ct - 1$. La constante C est donnée par la condition initiale (II.3.3): $y(1) = x_1^2 = C - 1$, soit $C = 1 + x_1^2$. On a donc

$$y(t) = (x_1^2 + 1)t - 1.$$

On en déduit la solution du problème de Cauchy (II.3.2), (II.3.3):

$$x(t) = \pm\sqrt{(x_1^2+1)t-1},$$

où le signe $\pm$ est le signe de x_1. On remarque que l'intervalle maximal d'existence de cette solution est $]\frac{1}{x_1^2+1}, +\infty[$.

3.b. Equations de Ricatti. Une équation différentielle de Ricatti s'écrit sous la forme

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t) \tag{II.3.4}$$

avec a, b et c des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a ne s'annule pas sur I.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière p de (II.3.4). On cherche alors une solution générale sous la forme $x(t) = p(t) + y(t)$. On peut montrer facilement que x est solution de (II.3.4) si et seulement si y est solution de l'équation suivante

$$y'(t) = (2a(t)p(t) + b(t))y(t) + a(t)y^2(t).$$

On reconnaît une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Comme vu précédemment, la fonction nulle est solution et les autres solutions ne s'annulent jamais. On peut donc les chercher sous la forme $y(t) = \dfrac{1}{z(t)}$ avec la fonction z vérifiant

$$z'(t) = -(2a(t)p(t) + b(t))z(t) - a(t).$$

Exemple II.3.3. L'équation différentielle:

$$x'(t) = ax^2(t) + bx(t) + c$$

est une équation de Ricatti autonome. Lorsque le trinôme du second degré formé par son second membre a une racine x^*, la fonction constante $x(t) = x^*$ est solution. On obtient alors une équation de Bernouilli sur la nouvelle inconnue $z(t) = x(t)+x^*$.

Exemple II.3.4. On souhaite résoudre l'équation $t^2(x'(t) + x(t)^2) = tx(t) - 1$ sur $I =]0, +\infty[$, avec une condition initiale en $t = 1$:

$$x(1) = x_1.$$

On divise par t^2 et on trouve

$$x'(t) + x(t)^2 - \frac{x(t)}{t} + \frac{1}{t^2} = 0 \tag{II.3.5}$$

qui est une équation différentielle de Ricatti. En effet, la fonction $p(t) = \dfrac{1}{t}$ est une solution particulière évidente. On cherche une solution générale sous la forme $x(t) = p(t) + y(t)$. On a

$$p'(t) + y'(t) + p(t)^2 + 2p(t)y(t) + y(t)^2 - \frac{p(t)}{t} - \frac{y(t)}{t} + \frac{1}{t^2} = 0$$

puis comme la fonction $p(t) = \dfrac{1}{t}$ est une solution particulière de (II.3.5), on obtient l'équation de Bernoulli

$$y'(t) + \frac{2}{t}y(t) + y(t)^2 = 0$$

avec $a(t) = -\dfrac{2}{t}$, $b(t) = -1$ et $\alpha = 2$. On fait ensuite appel au changement de fonction $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, avec $y(t) \neq 0$ (cf §3.a), Exemple II.3.2.

Exercice II.3.5. Terminer la résolution des deux exemples précédents.

Une autre famille d'équations que l'on peut résoudre par changement de variable, l'équation de Clairaut, est traitée dans l'appendice de ce chapitre pour la lectrice ou le lecteur intéressé·e.

II.4. Courbes de niveau et équations différentielles exactes

4.a. Courbes de niveau. En cartographie, les courbes de niveau sont les courbes reliant les points de la carte ayant la même altitude. On peut citer aussi en météorologie les isothermes (courbes reliant les points de même température) et les isobares (courbes reliant les points de même pression).

Mathématiquement, on a la définition suivante:

Définition II.4.1. Soit $F : (t, x) \in J \times \mathbb{R} \to F(t, x) \in \mathbb{R}$. Soit k un réel donné. Une courbe de niveau k de la fonction F est le sous-ensemble $\mathcal{N}_k = \{(t, x) | F(t, x) = k\}$.

Exemple II.4.2. La courbe de niveau $k = 4$ de la fonction $F(t, x) = 3 - t - \dfrac{x}{2}$ a pour équation $3 - t - \dfrac{x}{2} = 4$. C'est donc la droite d'équation $x = -2t - 2$. La courbe de niveau $k = 81$ de la fonction $F(t, x) = t^2 + x^2$ a pour équation $t^2 + x^2 = 81$. C'est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $r = 9$.

4.b. Equations exactes. On a la définition suivante

Définition II.4.3. Considérons l'équation différentielle du premier ordre:

$$N(t, x(t))x'(t) + M(t, x(t)) = 0, \tag{II.4.1}$$

où M et N sont des fonctions continues sur $J \times \mathbb{R}$, à valeurs réelles, et J est un intervalle réel.

L'équation (II.4.1) est dite exacte s'il existe une fonction $F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues telles que

$$M(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \; N(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}.$$

Supposons que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors par le théorème de Schwarz, on a

$$\frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x \partial t}.$$

Si l'équation (II.4.1) est exacte alors on a

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}.$$

Et la réciproque est vraie. On a le résultat suivant:

Théorème II.4.4. *Soit J un intervalle et $D = J \times \mathbb{R}$ et $M, N : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si les fonctions M et N vérifient la relation suivante*

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}, \; (t, x) \in D,$$

alors l'équation (II.4.1) *est exacte. Dans ce cas, il existe une fonction* $F : D \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *telle que*

$$M(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t},\ N(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}.$$

La preuve est laissée en exercice au lecteur.

THÉORÈME II.4.5. *Soit* $I \subset J$. *Si l'équation différentielle de la forme* (II.4.1) *est exacte alors une fonction* $x \in C^1(I,\mathbb{R})$ *est solution de cette équation sur* I *si et seulement si il existe* $k \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$F(t,x(t)) = k.$$

DÉMONSTRATION. Si l'équation différentielle de la forme (II.4.1) est exacte, alors elle s'écrit sous les hypothèses sur la fonction F

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = 0.$$

Or on a

$$\frac{dF(t,x(t))}{dt} = \frac{\partial F(t,x(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(t,x(t))}{\partial t} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}.$$

On en déduit que $x(t)$ est solution de (II.4.1) si et seulement si $F(t,x(t))$ est constante. $\square$

Pour tout $(t_0,x_0) \in]a,b[\times]c,d[$, une solution du problème de Cauchy

$$\text{(II.4.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par l'équation $F(t,x(t)) = F(t_0,x_0)$.

EXEMPLE II.4.6. L'équation $(t-4x(t))x'(t) + (x(t)-3t^2) = 0$ est exacte. En effet, on a $M(t,x) = x-3t^2$, $N(t,x) = t-4x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}.$$

Donc l'équation est exacte. Il reste à trouver la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$M(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t},\ N(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}.$$

Intégrons M par rapport à t. On trouve

$$F(t,x) = xt - t^3 + \phi(x),$$

avec ϕ une fonction ne dépendant pas de la variable t. Comme $\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x)$, on a

$$t + \phi'(x) = t - 4x$$

donc $\phi'(x) = -4x$ et $\phi(x) = -2x^2 + C$, avec C une constante réelle. Finalement, on a $F(t,x) = xt - t^3 - 2x^2 + C$. La courbe de niveau de F de niveau k est définie par $F(t,x) = xt - t^3 - 2x^2 + C = k$. Posons $\alpha = k - C$. On cherche x tels que $-2x^2 + tx - t^3 - \alpha = 0$. Le discriminant est $\Delta = t^2 - 8(t^3+\alpha)$. Les lignes de niveau de F sont donc les courbes

$$x(t) = \frac{t}{4} \pm \frac{\sqrt{t^2 - 8(t^3+\alpha)}}{4}$$

avec t tel que $t^2 - 8(t^3 + \alpha) \geq 0$.

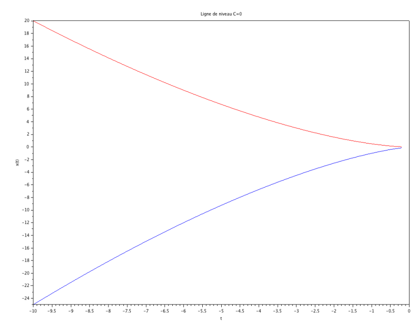

FIGURE 1. Lignes de niveau de F pour $\alpha = 0$ et $t \in \left[-10, -\frac{1}{8}\right]$.

Appendice du chapitre II

Comme pour l'appendice du chapitre I, les sujets traités ici ne seront pas aux programmes des devoirs sur table.

A. Equations de Clairaut

On appelle équation de Clairaut toute équation de la forme

$$x(t) = tx'(t) + f(x'(t)) \tag{A.1}$$

avec f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour résoudre cette équation, on introduit le changement de fonction inconnue $p = x'(t)$ (dite méthode du paramètre) et l'équation (A.1) devient

$$x = tp + f(p). \tag{A.2}$$

En dérivant les deux membres de l'équation, on a

$$\frac{dx}{dt} = p + t\frac{dp}{dt} + f'(p)\frac{dp}{dt}.$$

Comme on a posé $\dfrac{dx}{dt} = p$, on arrive à $p = p + t\dfrac{dp}{dt} + f'(p)\dfrac{dp}{dt}$, c'est-à-dire

$$(t + f'(p))\frac{dp}{dt} = 0.$$

Deux solutions sont possibles:

- Soit $\dfrac{dp}{dt} = 0$:

  Ceci donne $p = \lambda$, avec λ une constante, et l'équation (A.2) devient $x(t) = \lambda t + f(\lambda)$. On obtient donc une famille de droites.

- Soit $t + f'(p) = 0$:
  On en déduit $t = -f'(p)$. Si f' est bijective, on en déduit $p = \varphi(t)$. On obtient $x(t) = t\varphi(t) + f(\varphi(t))$ qui est l'équation paramétrique d'une courbe. Cette dernière est l'enveloppe de la famille de droites précédente. On l'appelle intégrale singulière de Clairaut.

Exemple: On souhaite résoudre l'équation $x(t) = tx'(t) + (x'(t))^2 + 1$. Posons $x'(t) = p$ ou $\dfrac{dx}{dt} = p$. On a

$$x = tp + p^2 + 1 \text{ et } \frac{dx}{dt} = p + t\frac{dp}{dt} + 2p\frac{dp}{dt}.$$

Puisque $\dfrac{dx}{dt} = p$, alors $p + t\dfrac{dp}{dt} + 2p\dfrac{dp}{dt} = p$, d'où $(t+2p)\dfrac{dp}{dt} = 0$. On a donc

- soit $\dfrac{dp}{dt} = 0$: On a alors $p = \lambda$, avec λ une constante, et on obtient une famille de droites $(D_\lambda) : x(t) = \lambda t + \lambda^2 + 1$.
- soit $t + 2p = 0$: On en déduit $(t, x) = (-2p, -p^2 + 1)$. D'où la solution $x(t) = -\dfrac{t^2}{4} + 1$ qui est une parabole (en rouge sur la figure ci-après).

On représente quelques-unes des solutions sur la figure ci-dessous. On peut montrer que l'ensemble des droites (D_λ) est l'ensemble des tangentes à la parabole. La parabole est l'enveloppe des droites (D_λ).

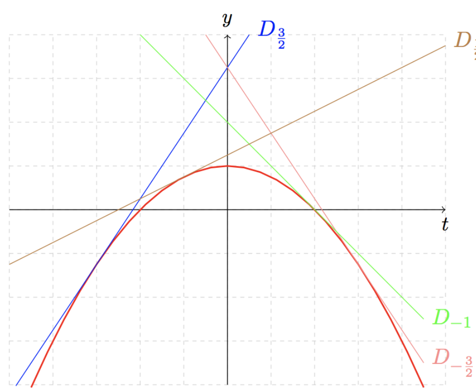

FIGURE 2. Quelques solutions de l'équation de Clairaut $x(t) = tx'(t) + (x'(t))^2 + 1$.

CHAPITRE III

Etude qualitative

Ce troisième chapitre est consacré à quelques notions destinées à mener une étude qualitative d'une équation différentielle scalaire

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

où $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Cette équation admet donc pour tout donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ une unique solution maximale telle que $x(t_0) = x_0$.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'on peut résoudre explicitement certains types particuliers d'équations différentielles. Dans le cas où une résolution explicite n'est pas possible, des méthodes géométriques existent pour réaliser une étude qualitative, à savoir obtenir des informations sur le comportement des solutions sans en connaître l'expression.

On rappelle qu'une courbe de la forme $\{(t, x(t)),\ t \in I\}$ est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

III.1. Etude géométrique

1.a. Champ de directions. Dans le cas scalaire non autonome, en un point $(t, x(t))$ du graphe de la solution, la pente de sa tangente est donnée par la valeur $p = f(t, x(t))$. On peut ainsi considérer un champ de directions dont les propriétés sont au cœur de l'étude qualitative des équations différentielles.

Définition III.1.1. Le *champ de directions* (ou *de tangentes*) associé à l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ est, la donnée en chaque point (t, x) du plan, de la direction de la tangente $(1, f(t, x))$ à la courbe intégrale passant par $(t, x(t))$.

Pour représenter ce champ de direction, on peut choisir un quadrillage régulier de points (t, x) et de calculer la pente $p = f(t, x)$ en chacun des points. Nous pouvons alors construire en chaque point (t, x) du plan, en lequel $f(t, x)$ est défini, un petit segment de droite centré sur le point (t, x) et de pente $p = f(t, x)$. Ce segment représente alors la tangente à la courbe intégrale de l'équation passant par le point (t, x). L'ensemble de tous les segments construits donne le champ de directions associé à l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$.

Une solution de l'équation différentielle suit le champ des directions. Son graphe est tangent en chaque point à chacun des segments. Chaque point du plan représente une condition initiale (t_0, x_0). La courbe que l'on trace à partir de ce point est le graphe de la solution telle que $x(t_0) = x_0$.

Exemple 1: On représente sur la Figure 3.1.a le champ de directions de l'équation différentielle $x'(t) = t^2$ et une courbe intégrale.

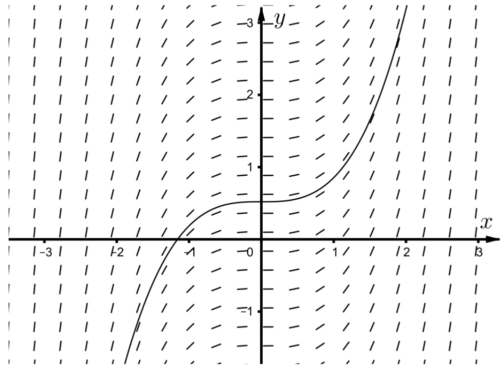

FIGURE 1. Champ de directions associé l'équation différentielle $x'(t) = t^2$.

Les solutions de l'équation différentielles sont données par $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$. On représente sur la figure ci-dessous certaines des courbes intégrales. Une seule passe par le point $M(1, 7/3)$ avec une tangente en ce point égale à $p = t^2 = 1$. C'est la courbe intégrale correspondant à la constante $C = 2$.

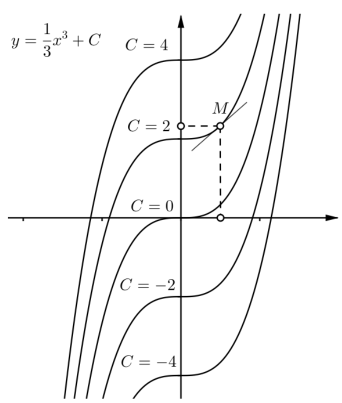

FIGURE 2. Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^2$.

Exemple 2: On représente sur la figure ci-après le champ de directions de l'équation différentielle $x'(t) = t + x(t)$ et plusieurs courbes intégrales.

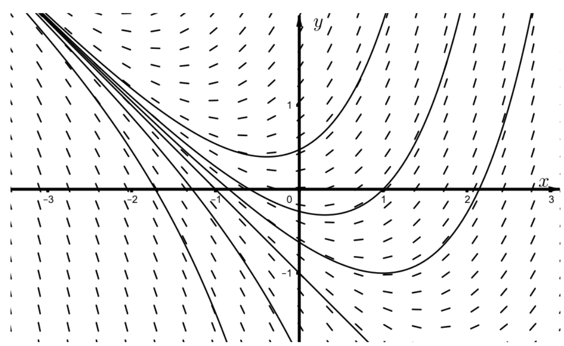

FIGURE 3. Champ de directions associé à l'équation différentielle $x'(t) = t + x(t)$.

REMARQUE III.1.2.

- L'existence d'une solution signifie que l'on peut tracer son graphe de façon "compatible" avec le champ de directions.
- L'unicité indique que, par chaque point, on ne peut en tracer qu'une solution. Les graphes des solutions ne se croisent jamais.

1.b. Courbes isoclines. Une autre approche pour représenter le champ de directions d'une équation différentielle est de trouver les isoclines.

DÉFINITION III.1.3. Pour tout réel p, on appelle isocline de pente p de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ l'ensemble des points (t, x) tels que $f(t, x) = p$.

Les isoclines sont donc les courbes sur lesquelles le champ a une direction donnée p. En chaque point d'une isocline de pente p passe une solution et sa tangente en ce point a pour pente p. Une isocline n'est pas toujours le graphe d'une fonction, et il n'y a pas de raison pour que ce soit une courbe intégrale. Remarquons toutefois que l'union des courbes intégrales des solutions constantes est l'isocline correspondant à la pente 0.

Exemple: On représente sur la figure ci-après quelques isoclines de l'équation différentielle $x'(t) = x(t) - \sin t$. L'isocline de pente p est la sinusoïde d'équation $y(t) = \sin t + p$. Les isoclines de pente p pour p entiers entre -3 et 3 sont représentées en jaune. Sur chaque isocline, on trace des petits segments de pente p. On a tracé le graphe d'une solution. Il croise chaque isocline avec la pente p correspondante.

1.c. Régionnement du plan. Si $x = x(t)$ est solution de $x'(t) = f(t, x(t))$, alors tant que le graphe de x reste dans une région du plan dans laquelle $f(t, x)$ est positif (respectivement négatif), la fonction x est croissante (respectivement décroissante). Ainsi en déterminant les régions du plan dans lesquelles $f(t, x)$ est positif et celles dans lesquelles $f(t, x)$ est négatif, on obtient des renseignements sur les solutions. Leurs graphes traversent les premières en croissant et les secondes en

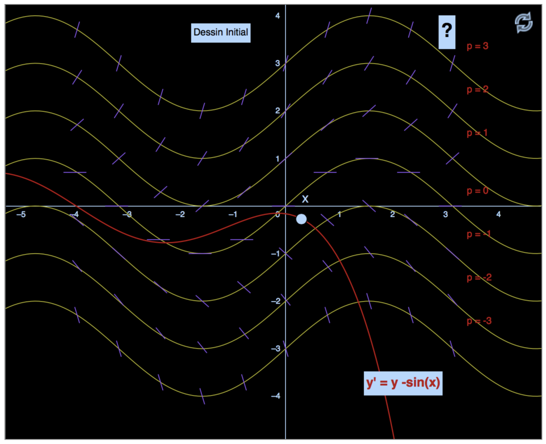

FIGURE 4. Isoclines associées à l'équation différentielle $x'(t) = x(t) - \sin t$.

décroissant. Si un tel graphe passe par un point en lequel $f(t, x) = 0$ (isocline avec $p = 0$), alors il admet en ce point une tangente horizontale.

Regardons ceci au travers de l'exemple $x'(t) = x(t)^2(x(t) - t)$. On a $f(t, x) = x^2(x - t)$.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que l'équation admet une unique solution maximale pour chaque donnée initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les graphes des solutions fournissent une partition du domaine $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'objectif est de dessiner cette famille de graphes avec le plus de précision possible.
- On trace l'isocline de pente nulle, i.e. $\mathcal{I}_0 = \{(t, x) \in I \times \Omega | f(t, x) = 0\}$. C'est la réunion de l'axe des abscisses $x = 0$ et de la droite $x = t$ (en orange sur la Figure 3.1.c). Un point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ appartient à l'isocline $\mathcal{I}_0$ lorsque le graphe d'une solution de condition initiale (t_0, x_0) admet en ce point une tangente horizontale.
- On régionne alors $I \times \Omega$ selon le signe de f. Dans la zone $x > t$ (à gauche de la droite $x = t$, notée '+' sur le dessin), les solutions de $x'(t) = x(t)^2(x(t) - t)$ sont croissantes. Dans la zone $x < t$ (à droite de la droite $x = t$, notée '-' sur le dessin), elles sont décroissantes.
- Pour obtenir plus d'information sur les solutions, on peut soit représenter d'autres isoclines de pente $p \neq 0$, soit le champ de directions (cf Figure 3.1.c pour $x'(t) = x(t)(x(t) - t)$).
- On essaye ensuite de repérer des solutions particulières (ici, la solution nulle) et des symétries éventuelles pour réduire l'étude (sur notre exemple, il n'y en a pas). Puisque la fonction $x(t) = 0$ est solution particulière, les autres solutions ne s'annulent pas (par unicité découlant du théorème de Cauchy-Lipschitz) et gardent donc un signe constant.

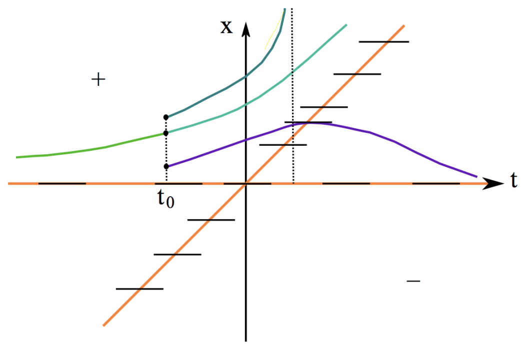

FIGURE 5. Exemple de régionnement.

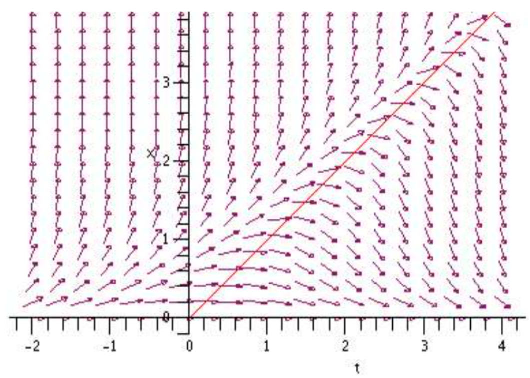

FIGURE 6. Exemple: isocline de pente 0 + champ de directions.

III.2. Barrières

On va désormais définir la notion de barrières pour compléter l'étude qualitative.

DÉFINITION III.2.1. Soit $K \subset I$ un sous-intervalle. Une fonction dérivable $\alpha : K \subset I \to \Omega \subset \mathbb{R}$ avec une dérivée continue est

- une *barrière inférieure* (ou *sous-solution*) pour l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ sur l'intervalle K si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ pour tout $t \in K$.
- une *barrière supérieure* (ou *sur-solution*) pour l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ sur l'intervalle K si $\alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t))$ pour tout $t \in K$.

On parle de barrière inférieure (respectivement supérieure) *stricte* quand $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ sur K (respectivement $\alpha'(t) > f(t, \alpha(t))$ sur K).

Remarquons qu'une solution de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ est une barrière inférieure (non stricte) et une barrière supérieure (non stricte).

Intuitivement, les barrières inférieures empêchent les solutions de "s'échapper" vers le bas, et les barrières supérieures de "s'échapper" vers le haut. Elles ne sont en général pas solutions de l'équation mais elles canalisent les solutions.

On peut aussi donner une Interprétation géométrique: La fonction α est une barrière supérieure de $x'(t) = f(t, x(t))$ si, pour chaque instant $t \in K$, la tangente au graphe de α au point $(t, \alpha(t))$ a une pente plus grande que la pente $p = f(t, \alpha(t))$. Pour une barrière inférieure, la pente est plus petite.

Exemple III.2.2. Considérons l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^3 - (1 + t^2)$.

On a $f(t, x) = x^3 - (1 + t^2)$. La fonction $\alpha : t \to \alpha(t) = (1 + t^2)^{1/3}$ est pour l'équation différentielle

- une barrière inférieure sur l'intervalle $K =]-\infty, 0]$,
- une barrière supérieure sur l'intervalle $K = [0, +\infty[$.

En effet, on a $\alpha'(t) = \dfrac{2t}{3}(1 + t^2)^{-2/3}$ et $f(t, \alpha(t)) = (1 + t^2) - (1 + t^2) = 0$. Donc il s'en suit

- $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) = 0$ pour $t \in\ ]-\infty, 0]$,
- $\alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t)) = 0$ pour $t \in\ [0, +\infty[$.

Exemple III.2.3. La fonction $\alpha : t \in]0, +\infty[\to \sqrt{t} \in \mathbb{R}$ est une barrière supérieure stricte pour l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^2 - t$. On a $\alpha'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ et $f(t, \alpha(t)) = 0$.

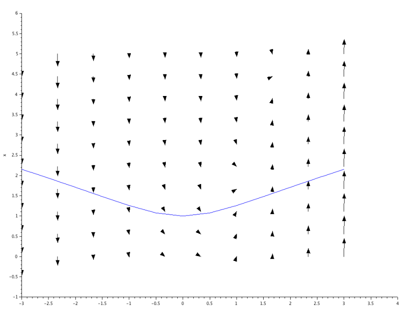

Figure 7. Exemple d'une barrière (en bleu) de l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^3 - (1 + t^2)$ et champ de directions (réalisé avec Scilab).

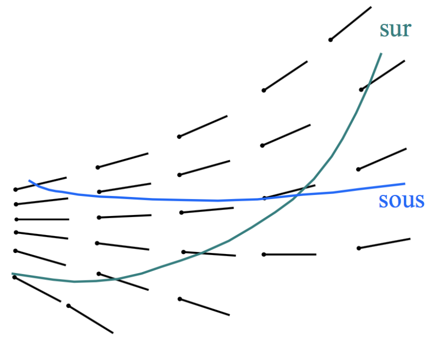

FIGURE 8. Barrières d'une équation différentielle (barrière supérieure en vert, barrière inférieure en bleu).

REMARQUE III.2.4. On peut trouver facilement des barrières supérieures et inférieures avec la caractérisation suivante:

- Lorsque le graphe d'une fonction dérivable et croissante α est inclus dans l'isocline $\mathcal{I}_0$, cette fonction α est une barrière supérieure.
- Lorsque le graphe d'une fonction dérivable et décroissante α est inclus dans l'isocline $\mathcal{I}_0$, cette fonction α est une barrière inférieure.

Revenons sur le premier exemple de cette partie (cf Figure 3.1.c). C'est le cas de la fonction $\alpha(t) = t$ ayant une dérivée strictement positive, qui est de ce fait est une barrière supérieure stricte pour l'équation $x'(t) = x(t)^2(x(t) - t)$. En effet, on a $\alpha'(t) = 1 > 0 = f(t, \alpha(t))$.

En général, lorsque l'on mène une étude qualitative, on ne connaît pas explicitement la solution. Il est plus facile de construire des barrières supérieures ou inférieures pour l'équation différentielle que de trouver des solutions car on demande une inégalité et non une égalité.

Nous allons maintenant énoncer des théorèmes de comparaison *a priori* d'une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ et d'une barrière supérieure ou inférieure de cette équation différentielle.

THÉORÈME III.2.5. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit α une barrière inférieure, et β une barrière supérieure, définies sur un intervalle $J \subset I$, pour l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$. On suppose que l'une des barrières α ou β est stricte. Soit $t_0 \in J$. Supposons*

$$\alpha(t_0) \leq \beta(t_0). \tag{III.2.1}$$

Alors

$$\forall t \in (t_0, \infty) \cap J, \quad \alpha(t) < \beta(t). \tag{III.2.2}$$

Remarquons que dans les hypothèses du théorème, α (respectivement β) peut-être une solution de l'équation. Dans ce cas β (respectivement α) doit être un barrière stricte. Ainsi, si une solution $x(t)$ majore une barrière inférieure stricte de l'équation en $t = t_0$, elle reste supérieure à cette barrière pour $t > t_0$ (avec un énoncé analogue pour une barrière inférieure).

Démonstration. *Étape 1.* Montrons d'abord

$$\exists \delta > 0, \quad \forall t \in]t_0, t_0+\delta[, \quad \alpha(t) < \beta(t). \tag{III.2.3}$$

On a $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$.

Si $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$, (III.2.3) découle immédiatement de la continuité de $\beta - \alpha$.

Si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $\alpha'(t_0) \leq f(t, \alpha(t_0)) = f(t, \beta(t_0)) \leq \beta'(t_0)$, avec au moins une inégalité stricte (car l'une des barrières est stricte). Donc $\beta'(t_0) - \alpha'(t_0) > 0$, ce qui implique à nouveau (III.2.3).

Étape 2. On montre par l'absurde l'inégalité annoncée (III.2.2). Supposons que (III.2.2) est fausse. Il existe donc $t > t_0$, avec $t \in J$ et $\alpha(t) \geq \beta(t)$. On pose alors

$$t_1 = \inf\{t \in J \text{ t.q. } t > t_0 \text{ et } \alpha(t) \geq \beta(t)\},$$

qui est bien défini car c'est la borne inférieure d'un ensemble non-vide et borné inférieurement. Par l'étape 1, $t_1 > t_0$. Par continuité, de $\alpha - \beta$ et puisque $\alpha(\tau_n) > \beta(t_n)$ pour une suite $\tau_n \to t_1$, on a $\alpha(t_1) \geq \beta(t_1)$. De plus, par la définition de t_1,

$$\forall t \in]t_0, t_1[, \quad \alpha(t) < \beta(t),$$

et donc, par continuité de $\beta - \alpha$, $\alpha(t_1) \leq \beta(t_1)$. On a donc

$$\alpha(t_1) = \beta(t_1).$$

On en déduit $\alpha'(t_1) \leq f(t, \alpha(t_1)) = f(t, \beta(t_1)) \leq \beta'(t_1)$, avec au moins une inégalité stricte. Donc $\alpha'(t_1) < \beta'(t_1)$, ce qui montre que $\alpha(t) > \beta(t)$ pour $t < t_1$, proche de t_1, contredisant la définition de t_1.

□

En supposant que la fonction f est lipschitzienne, il est possible d'enlever l'hypothèse de barrière stricte:

Théorème III.2.6. *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Soit α une barrière inférieure, et β une barrière supérieure, définies sur un intervalle $J \subset I$, pour l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$. Soit $t_0 \in J$. Supposons*

$$\alpha(t_0) < \beta(t_0). \tag{III.2.4}$$

Alors

$$\forall t \in (t_0, \infty) \cap J, \quad \alpha(t) < \beta(t). \tag{III.2.5}$$

Démonstration. On se place pour simplifier dans le cas où f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Le cas d'une fonction lipschitzienne se traite de manière similaire, modulo quelques technicalités mineures.

La preuve est similaire à l'étape 2 de la preuve du théorème précédent. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il exists $t > t_0$ tel que $\alpha(t) \geq \beta(t)$, et on pose à nouveau

$$t_1 = \inf\{t \in J \text{ t.q. } t > t_0 \text{ et } \alpha(t) \geq \beta(t)\}.$$

Comme dans la démonstration précédente, on obtient facilement $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$. De plus $\alpha(t) < \beta(t)$ pour $t \in [t_0, t_1[$. La fonction f étant k-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, il existe un $k > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|.$$

On en déduit, pour $t \in [t_0, t_1[$,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}(\beta(t)-\alpha(t)\right) = e^{kt}\Big[k(\beta(t)-\alpha(t)) + f(t,\beta(t)) - f(t,\alpha(t))\Big] \geq 0,$$

et donc $e^{kt_1}\big(\beta(t_1)-\alpha(t_1)\big) \geq e^{kt_0}\big(\beta(t_0)-\alpha(t_1)\big) > 0$, ce qui contredit l'égalité $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$. □

Remarque III.2.7. De façon imagée, on peut retenir qu'une courbe intégrale de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ ne peut traverser une barrière inférieure (respectivement supérieure) que "du bas vers le haut" (respectivement "du haut vers le bas") dans le sens des t croissants.

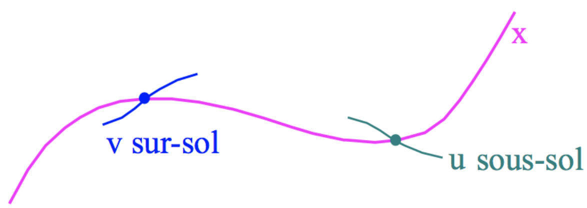

Figure 9. Courbes intégrales et barrières.

Exemple III.2.8.

$$\beta(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

barrière supérieure stricte pour

$$y'(t) = \frac{y(1-y)}{t} - y(t)e^{-y(t)}.$$

Remarque III.2.9. On peut également des énoncer des résultats de comparaison dans le passé, mais les inégalités s'inversent: par exemple, si α est une barrière inférieure, et β une barrière supérieure stricte pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$, et $\alpha(t_0) > \beta(t_0)$, alors $\alpha(t) > \beta(t)$ pour $t < t_0$. Cf plus loin les résultats sur les anti-entonnoirs.

III.3. Entonnoirs et anti-entonnoirs

Les barrières sont utiles car elle permettent de localiser les solutions. Plus précisément, une solution qui se trouve en t_0 à la fois au-dessus d'une barrière inférieure et en-dessous d'une barrièrre supérieure restera "piégée" entre les deux pour tout $t > t_0$. Enonçons plus en détail ce résultat. On a la défintion suivante.

Définition III.3.1. Soient α une barrière inférieure stricte pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un intervalle $K \subset I$ et β barrière supérieure stricte. Si on a $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in K$, alors la région

$$E = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 | t \in K, \alpha(t) \leq y \leq \beta(t)\}$$

s'appelle un entonnoir. On la désigne également par le triplet (K, α, β).

Théorème III.3.2. *("Théorème de l'entonnoir") Soient (K, α, β) un entonnoir pour l'équation (e): $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $K =]a, b[$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, et soit (J, x) une solution maximale de (e). Soit $t_0 \in J$ tel que $(t_0, x(t_0))$ appartienne à l'ensemble (K, α, β). Alors x est définie sur $[t_0, b[$ et pour tout $t \in [t_0, b[$, on a*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t).$$

Démonstration. La solution maximale associée à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est définie sur un intervalle $]t^-, t^+[$. Comme on a $\alpha(t_0) \leq x(t_0) \leq \beta(t_0)$, le théorème de comparaison Théorème III.2.5 entraine

$$\forall t \in [t_0, t^+[\cap K, \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t).$$

□

Autrement dit, si une solution démarre à $t = t_0$ à l'intérieur de l'entonnoir, elle y reste dans le futur i.e. pour $t > t_0$. En revanche, elle peut sortir de l'entonnoir pour $t < t_0$.

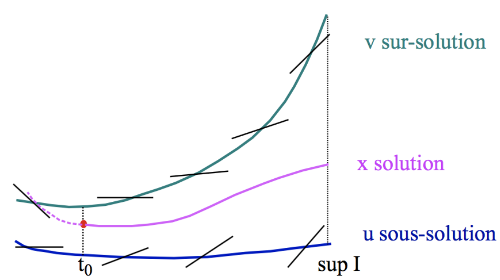

Figure 10. Entonnoir.

Définition III.3.3. Soient α une barrière inférieure stricte pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un intervalle $K \subset I$ et β barrière supérieure stricte. Si on a $\alpha(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in K$, alors la région

$$A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 | t \in K, \beta(t) \leq y \leq \alpha(t)\}$$

s'appelle un anti-entonnoir. On la désigne également par le triplet (K, β, α)

Théorème III.3.4. *Soit (K, β, α) un anti-entonnoir pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ et (J, x) une solution telle que $\beta(t_0) \leq x_0 \leq \alpha(t_0)$, avec la donnée initiale $(t_0, x_0) \in K \times \Omega$. Alors la solution maximale x telle que $x(t_0) = x_0$ est définie sur l'intervalle $]-\infty, t_0[\cap K$ et elle vérifie pour tout $t \in]-\infty, t_0[\cap K$*

$$\beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t).$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde Si il existe $t < t_0$ avec $t \in K$ tel que $\beta(t) > x(t)$, alors par le théorème de comparaison (Théorème III.2.5), $\beta(t_0) > x(t_0)$, contredisant notre hypothèse. Donc pour $t \in]-\infty, t_0[\cap K$, on a $\beta(t) \leq x(t)$. On raisonne de même pour montrer l'inégalité $x(t) \leq \alpha(t)$. □

Si une solution démarre à $t = t_0$ à l'intérieur de l'anti-entonnoir, elle y reste pour $t < t_0$. En revanche, elle peut en sortir lorsque $t > t_0$.

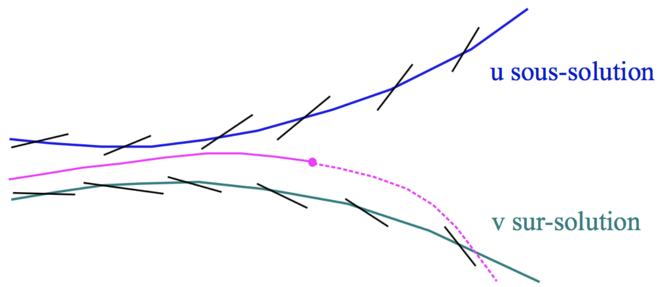

FIGURE 11. Anti-entonnoir.

CHAPITRE IV

Un exemple de méthode numérique

IV.1. Introduction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant le point t_0. Soit f une fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f : I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & f(t, y) \end{array}$$

et continue par rapport aux deux variables. On rappelle que le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre consiste à trouver une fonction réelle $x : I \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{C}^1(I)$, telle que

$$\text{(IV.1.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

Il n'est pas toujours facile de calculer une solution explicite d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle. Nous avons vu dans le Chapitre 2 des familles particulières d'EDO pour lesquelles une résolution explicite est possible. Dans le cas contraire, on peut faire appel à des méthodes numériques qui permettent d'obtenir un calcul approché de la solution. Dans ce chapitre, on donne un exemple d'une telle méthode numérique, la méthode d'Euler explicite. On commence par quelques généralités sur les méthodes numériques à un pas, dont fait partie la méthode d'Euler.

IV.2. Méthodes numériques à un pas

Fixons tout d'abord quelques notations pour l'approximation numérique du problème (IV.1.1). On considère un temps final d'observation $0 < T < +\infty$ et $I = [t_0, T]$ l'intervalle d'intégration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La première étape consiste à discrétiser l'intervalle I en N sous-intervalles $I_n = [t^n, t^{n+1}]$, $0 \leq n \leq N-1$, de longueur $h > 0$. Le paramètre $h := \dfrac{T - t_0}{N}$ est appelé le *pas de discrétisation* (destiné à tendre vers 0). Les points $t^n = t^0 + nh$, $n = 0, 1, \ldots, N$, sont les *points de discrétisation*. On a $t^0 = t_0$ et $t^N = t_0 + Nh = t_0 + T - t_0 = T$.

L'approximation de la solution de (IV.1.1) par une méthode numérique consiste à construire une suite réelle $(x^n)_{n=0,\ldots,N}$ avec x^n approchant la valeur $x(t^n)$ prise par la solution exacte x au point de discrétisation t^n, $n = 0, \ldots, N$. On pose naturellement $x^0 = x(t_0) = x_0$.

Avant de présenter les méthodes numériques les plus classiques, nous introduisons le vocabulaire.

Définition IV.2.1. Une méthode numérique pour l'approximation du problème de Cauchy (IV.1.1) est dite à un pas si $\forall n \geq 0$, x^{n+1} ne dépend que de x^n. Sinon, on dit que le schéma est une méthode multi-pas ou à pas multiples.

DÉFINITION IV.2.2. Un schéma est dit *explicite* si, pour toute fonction f, la valeur x^{n+1} peut être calculée directement à l'aide de la valeur x^n via une relation $x^{n+1} = T(x^n)$ avec T une application dont on connaît l'expression analytique en fonction de f.

Un schéma est dit *implicite* si le calcul de x^{n+1} à partir de la donnée x^n nécessite de résoudre un problème (non-linéaire si f est non-linéaire) de la forme $H(x^n, x^{n+1}) = 0$.

Nous nous intéressons ici aux méthodes à un pas. On commence par donner 3 exemples.

- *Méthode d'Euler explicite*: Connaissant x^0, calculer pour $n = 0, \dots, N-1$:

$$x^{n+1} = x^n + hf(t^n, x^n). \tag{IV.2.1}$$

- *Méthode du point-milieu*: Connaissant x^0, calculer pour $n = 0, \dots, N-1$:

$$\begin{cases} K_1 = f(t^n, x^n) \\ K_2 = f(t^n + \dfrac{h}{2}, x^n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ x^{n+1} = x^n + hK_2. \end{cases} \tag{IV.2.2}$$

  C'est une méthode explicite, appelée aussi méthode d'Euler améliorée.
- *Méthode Euler implicite*: Connaissant x^0, calculer pour $n = 0, \dots, N-1$:

$$x^{n+1} = x^n + hf(t^{n+1}, x^{n+1}). \tag{IV.2.3}$$

  Le calcul de x^{n+1} se fait en résolvant un problème non-linéaire si f dépend non linéairement de la seconde variable. On doit, à n fixé, calculer x^{n+1} racine de la fonction $g(y) = y - x^n - hf(t^{n+1}, y)$.

IV.3. Méthode d'Euler explicite

3.a. Construction de la méthode. La méthode d'Euler explicite est la plus simple et intuitive pour la résolution numérique d'équations différentielles. Elle n'en est pas moins efficace mais pas pour tout problème. Expliquons comment construire ce schéma numérique. Soit $h > 0$ le pas de discrétisation qui est en général petit. Soit $t \in I$. En supposant $x \in \mathcal{C}^2(I)$, on a le développement de Taylor suivant

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\tau) \tag{IV.3.1}$$

avec $\tau \in]t, t+h[\subset I$. On peut écrire

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \frac{h}{2}x''(\tau).$$

L'idée consiste à écrire l'équation différentielle au temps $t^n \in I$

$$x'(t^n) = f(t^n, x(t^n))$$

puis d'approcher $x'(t^n)$ par le quotient différentiel $\dfrac{x(t^n+h) - x(t^n)}{h}$. On sait alors contrôler l'erreur commise grâce à (IV.3.1). Nous y reviendrons.

On obtient ainsi

$$\frac{x(t^n+h) - x(t^n)}{h} \approx f(t^n, x(t^n)).$$

Enfin, on propose d'approcher la valeur $x(t^n)$ (que l'on ne connaît pas) par la valeur x^n et connaissant x^n, on calcule x^{n+1} qui approche $x(t^{n+1})$ par la relation

$$\frac{x^{n+1}-x^n}{h}=f(t^n,x^n),$$

en sachant que l'on ajoute une seconde source d'erreur qu'il faudra quantifier.

Au final, la méthode d'Euler explicite est donnée par: connaissant $x^0\in\mathbb{R}$, on calcule pour $n=0,\dots,N-1$

$$x^{n+1}=x^n+hf(t^n,x^n). \tag{IV.3.2}$$

C'est bien un schéma explicite puisque l'on peut calculer x^{n+1} à partir de x^n seulement.

Sur chaque intervalle $I_n=[t^n,t^{n+1}]$, la solution approchée du problème de Cauchy calculée par la méthode d'Euler explicite est donnée par le segment de droite reliant les points (t^n,x^n) et (t^{n+1},x^{n+1}). Cette méthode permet donc d'approcher la solution de (IV.1.1) par une fonction continue affine par morceaux telle que

$$y(t)=x^n+\frac{t-t^n}{h}(x^{n+1}-x^n),\ \text{si t}\in[t^n,t^{n+1}]$$

de pente $\dfrac{x^{n+1}-x^n}{h}=f(t^n,x^n)$.

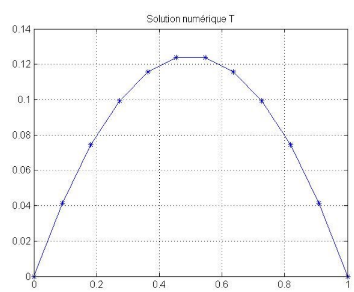

FIGURE 1. Exemple de solution approchée.

Exemple: On veut calculer la solution approchée du problème de Cauchy suivant par la méthode d'Euler explicite

$$\begin{cases} x'(t)=a(t)x(t)+b(t), t\in\ [t_0,T] \\ x(t_0)=x_0. \end{cases} \tag{IV.3.3}$$

Le schéma s'écrit: connaissant $x^0=x_0$, on calcule pour $n=0,\dots,N-1$

$$x^{n+1}=x^n+hf(t^n,x^n)=x^n+h(a(t^n)x^n+b(t^n))=(1+ha(t^n))x^n+hb(t^n).$$

Premiers termes de la suite: $x^1=(1+ha(t_0))x_0+hb(t_0)$, $x^2=(1+ha(t^1))x^1+hb(t^1)$, ...

3.b. Analyse de convergence. On a le théorème suivant:

THÉORÈME IV.3.1. *Soit* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, $T \in I$ *avec* $T > t_0$. *On suppose que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e. qu'il existe* $L > 0$ *tel que*

$$\forall (t,y),(t,z) \in I \times \mathbb{R}, |f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|. \tag{IV.3.4}$$

Soit $(x^0) \in \mathbb{R}$, *et* $(x^n)_{0 \leq n \leq N}$ *la suite (finie) définie par*

$$x^{n+1} = x^n + hf(t^n, x^n),$$

où h *et* t^n *sont définis comme précédemment.*

Alors il existe $K_1, K_2 > 0$ *ne dépendant que de* f, t_0, T *et* x_0 *tels que*

$$\forall 0 \leq n \leq N, |x(t^n) - x^n| \leq K_1|x_0 - x^0| + K_2 h,$$

REMARQUE IV.3.2. Dans le théorème, on n'impose pas $x^0 = x_0$. Cela permet notamment de prendre en compte les erreurs de précision éventuelles lorsque l'on applique le schéma numérique sur une machine.

REMARQUE IV.3.3. On a $\lim\limits_{h \to 0, x^0 \to x_0} \max\limits_{0 \leq n \leq N} |x(t^n) - x^n| = 0$. La méthode d'Euler explicite est dite *convergente*.

DÉMONSTRATION. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors x est de classe $\mathcal{C}^2$. On a le développement de Taylor à l'ordre 2 suivant

$$x(t^{n+1}) = x(t^n + h) = x(t^n) + hx'(t^n) + \frac{h^2}{2}x''(s^n)$$

avec $s^n \in]t^n, t^{n+1}[$. Par suite, on obtient

(IV.3.5)

$$\begin{aligned} x(t^{n+1}) - x^{n+1} &= x(t^n) + hx'(t^n) + \frac{h^2}{2}x''(s^n) - x^n - hf(t^n, x^n) \\ &= x(t^n) + hf(t^n, x(t^n)) + \frac{h^2}{2}x''(s^n) - x^n - hf(t^n, x^n) \\ &= (x(t^n) - x^n) + h(f(t^n, x(t^n)) - f(t^n, x^n)) + \frac{h^2}{2}x''(s^n). \end{aligned}$$

Posons $e^n := x(t^n) - x^n$ l'erreur commise au temps discret t^n. On en déduit

$$e^{n+1} = e^n + h(f(t^n, x(t^n)) - f(t^n, x^n)) + \frac{h^2}{2}x''(s^n).$$

Or f est supposée lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, donc

$$|f(t^n, x(t^n)) - f(t^n, x^n)| \leq L|x(t^n) - x^n| = Le^n.$$

De plus, la fonction x'' est continue sur $[t_0, T]$ et par conséquent y est bornée, soit

$$|x''(s^n)| \leq M = \sup_{t_0 \leq s \leq T} |x''(s)|.$$

La constante M dépend de x (qui ne dépend que de f, x_0 et t_0) et de T.

Finalement, on arrive à l'inégalité

$$|e^{n+1}| \leq (1 + hL)|e^n| + M\frac{h^2}{2}.$$

On en déduit par récurrence sur $n \geq 0$ que

$$|e^n| \leq (1 + hL)^n|e^0| + \frac{Mh^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(1 + hL)^k.$$

Avec $n \leq N$ et $Nh = T$ et la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a

$$(1+hL)^n \leq (1+hL)^N = e^{N\ln(1+hL)} \leq e^{NhL} = e^{TL}.$$

On obtient finalement l'estimation voulue

$$|e^n| \leq e^{TL}|e^0| + Ne^{TL}M\frac{h^2}{2} = e^{TL}|e^0| + \frac{MTe^{TL}}{2}h$$

en posant $K_1 := e^{TL}$ et $K_2 := \dfrac{MTe^{TL}}{2}$. □

Exercice IV.3.4. On considère le problème de Cauchy

$$\text{(IV.3.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -150x(t) + 30 \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

(1) Calculer la solution exacte.
(2) On fixe un temps $T > 0$ et un nombre de subdivision N. Ecrire le schéma d'Euler explicite. On notera (x^n) la suite des valeurs approchées.
(3) Trouver une relation de récurrence entre $x^{n+1} - 1/5$ et $x^n - 1/5$. En déduire x^n.
(4) On prend $x^0 = 1$. Comparer x^n et $(x(t^n))$, et donner une estimation fine de

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |x^n - x(t^n)|$$

qui tend vers 0 quand $N \to \infty$.