Feuille de TD 1 : Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $x'(t) + x(t) = te^{-t}$.

(b) $x'(t) - 2x(t) = \cos(t)$.

(c) $x'(t) = \log(t)x(t)$, $t > 0$.

(d) $x'(t) - tx(t) = e^t$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'espace des vecteurs colonnes à n lignes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On se donne deux entiers m et $n \geq 1$.

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $Y = AX$. Montrer que
$$\|Y\|_\infty \leq C(A)\|X\|_\infty,$$
où $C(A)$ est une constante (dépendant des $a_{i,j}$) que l'on précisera.

(b) Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est lipschitzienne.

Exercice 3. Justifier l'existence d'une unique solution pour les problèmes de Cauchy suivants, puis calculer la solution

(a) $x'(t) = ax(t) + b, x(0) = 0$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $x'(t) = x(t) + \sin(t), \quad x(0) = 1$.

(c) $x'(t) = x(t)^3, \quad x(0) = \theta$, où θ est un paramètre réel. On prendra bien soin de préciser le domaine d'existence de la solution selon θ. *Indication : on pourra commencer par résoudre l'équation quand $\theta = 0$, puis montrer que la solution ne peut pas s'annuler si $\theta \neq 0$.*

Exercice 4. Montrer que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = 3|x(t)|^{2/3} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$
admet une infinité de solutions. Pourquoi n'y-a-t-il pas unicité de la solution ? Que se passe-t-il si l'on choisit une condition initiale $x(0) = x_0$ avec $x_0 \neq 0$?

Exercice 5. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Déterminer toutes les solutions $x \in C^1(]a, b[)$ de l'équation
$$tx'(t) = x(t), \quad t \in]a, b[.$$

(b) On considère le problème de Cauchy

(E) $$tx'(t) = x(t), \quad x(0) = x_0,$$

où la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$. Ce problème rentre-t-il dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

(c) En utilisant (a), déterminer toutes les solutions de classe C^1 du problème de Cauchy (E).

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit I un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le problème de Cauchy :

$$(*) \qquad x \in C^1(I), \quad x(t_0) = x_0 \text{ et } \forall t \in I,\ x'(t) = f(t, x(t))$$

est équivalent à :

$$x \in C^0(I), \quad t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

(où $C^0(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur I, à valeurs réelles).

(b) On suppose $I = \mathbb{R}$ et qu'il existe $A > 0$ tel que $|f(t,x)| \leq A|x|$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Donner une borne de $|x(t)|$ en fonctions de A, t, t_0 et x_0.

Exercice 7. Soit g une fonction continue et positive et $G(t) = \int_0^t g(s)ds$.

(a) Soit y une fonction positive et C^1 sur $[0, \infty$ telle que

$$y'(t) \leq g(t)y(t).$$

Montrer

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) \leq y(0)e^{G(t)}.$$

(b) Soit z une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$ telle que

$$z(t) \leq A + \int_0^t g(s)z(s)ds.$$

Montrer

$$\forall t \geq 0, \quad z(t) \leq Ae^{G(t)}.$$

Exercice 8. Justifier l'existence et l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy suivants :

(a)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2(x_2(t))^2 + x_1(t) + 2t \\ x_2'(t) = (x_1(t))^2 - (x_2(t))^3 \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1'(t) - x_2'(t) = 3x_2(t)^2 - \cos(x_1(t)) \\ x_1'(t) + x_2'(t) = \cos(x_1(t)) \\ \qquad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 9. Écrire les équations différentielles suivantes comme des systèmes équations différentielles d'ordre 1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy proposés.

(a) $x''(t) + \cos(x'(t)) = x(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

(b) $x^{(3)}(t) = x^2(t) + t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$