Université Sorbonne Paris Nord — CP2I 2ème année
Option Equations Différentielles — Année 2024-25

Feuille de TD 2 : Résolution explicite d'équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

(a)
$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) + \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}. \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer une équation différentielle admettant pour solutions la famille de fonctions
$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = (2t+1)e^{-t}$.
(b) $x''(t) + 4x(t) = \tan t$.

Exercice 4. Résoudre les problèmes suivants :

(a) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t, x(0) = 0, x'(0) = 0$.
(b) $x''(t) + 2x'(t) + 4x(t) = te^t, x(0) = 1, x(1) = 0$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes

(a) $x'(t) + tx(t)^2 = -t$.
(b) $(t - x(t))x'(t) + x(t) - 2t = 0$.
(c) $x'(t) + \dfrac{x(t)}{2} - \dfrac{1}{2}(t-1)x(t)^3 = 0$.
(d) $x't) + \dfrac{x(t)}{t} - x(t)^2 + \dfrac{1}{t^2} = 0$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes avec la condition initiale $x(0) = 1$:

(a) $x'(t) = 2x(t) - x(t)^\alpha$, $\alpha > 0$.
(b) $x'(t) = x(t) + tx^2(t)$.
(c) $x'(t) = e^{-x(t)+t}$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes

(a) $x'(t) + 2x(t) - (t+1)\sqrt{x(t)} = 0$, $x(0) = 1$.

(b) $x'(t) - 2ax(t) = -2x^2(t)$, $x(0) = \dfrac{a}{2}$, $a > 0$.

Exercice 8. Nous considérons l'équation différentielle d'Euler avec conditions initiales

$$(1) \qquad \begin{cases} t^2x''(t) + tx'(t) + x(t) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}^{+,*} \\ x(1) = 1, x'(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Pour $t > 0$, faire le changement de variable $t = e^s$ et réécrire l'équation différentielle (1).

(b) On pose le changement d'inconnue $z(s) = x(e^s)$. Exprimer $x'(e^s)$ et $x''(e^s)$ en fonction de $z'(s)$ et de $z''(s)$.

(c) Montrer que l'équation différentielle obtenue à la question 1. devient
$$z''(s) + z(s) = 0.$$
Résoudre cette nouvelle équation.

(d) En déduire une solution du problème (1).