# Feuille de TD 3 : Études qualitatives d'équations différentielles

*Exercice* 1. Tracer le champ de directions associé à l'équation différentielle $x'(t) = t + x(t)$ pour $-3 < t < 3$, $-1 < x < 5$ ainsi que la courbe intégrale correspondant à la condition initiale $x(0) = \dfrac{1}{2}$.

*Exercice* 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver une barrière inférieure stricte $\alpha(t) = a$ et une barrière supérieure stricte $\beta(t) = b$ de l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^2 - 1$ de façon à ce que $(\mathbb{R}, \beta, \alpha)$ soit un anti-entonnoir.

*Exercice* 3. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = t + \frac{1}{x^2(t) + 1} \tag{1}$$

(a) L'équation (1) vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

(b) On définit

$$\alpha_c(t) = \frac{t^2}{2} + c, \quad \beta_c(t) = \frac{t^2}{2} + t + c.$$

Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_c$ est une barrière inférieure stricte et $\beta_c$ est une barrière supérieure. Montrer que pour $\varepsilon > 0$,

$$\beta_{c,\varepsilon}(t) = \frac{t^2}{2} + (1 + \varepsilon)t + c$$

est une barrière supérieure stricte.

(c) Proposer une famille d'entonnoirs sur $]0, \infty[$ et une famille d'anti-entonnoirs sur $]-\infty, 0[$ pour l'équation (1).

(d) Soit $x$ une solution de (1), de condition initiale $x(0) = x_0$. Montrer

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{t^2}{2} + x_0 \leq x(t) \leq \frac{t^2}{2} + t + x_0.$$

Donner un encadrement similaire pour $t \leq 0$.

(e) Déterminer

$$\ell = \lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{t^2}.$$

(f) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $C > 0$ (dépendant tous deux de $x_0$) telle que

$$\forall t \geq 1, \quad \left| x(t) - \frac{t^2}{2} - a \right| \leq \frac{C}{t^3}.$$

*Exercice* 4. On considère l'équation

$$x'(t) = e^{-x(t)} e^{-\frac{1}{1+t+x^2(t)}}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

(a) Résoudre l'équation :

$$x'(t) = e^{-x(t)}, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que les solutions de (3) sont des barrières supérieures pour l'équation (2). En déduire une borne de la solution de l'équation (2) avec condition initiale $x_0$.

*Exercice* 5. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = x^2(t) - t^4, \tag{4}$$

et les fonctions

$$\alpha_c(t) = -\frac{t^5}{5} + c, \quad \beta(t) = t^2, \quad \gamma_T(t) = \frac{1}{T-t}.$$

où $c$ et $T$ sont des paramètres réels.

(a) Déterminer pour chacune des ces fonctions des intervalles sur lesquelles elles définissent des barrières inférieures ou supérieures.

(b) En déduire des bornes inférieures et supérieures de la solution de (4) avec condition initiale $x(0) = x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}$, selon la valeur de $x_0$.