CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 15/11/2021.
Révisions d'algèbre linéaire.

Exercice 1.

a. Posons $N := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer N^n pour $n \geq 1$.

b. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. En utilisant l'égalité $A = 2I_3 + N$ et en vérifiant que l'on peut utiliser la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 2. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1-i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} z+2i & 3 \\ -1 & z \end{bmatrix} \text{ en fonction du paramètre } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3. Soit $\vec{u}_1 = (6, -6, -1)$, $\vec{u}_2 = (-3, 2, 1)$, $\vec{u}_3 = (2, -2, 0)$, et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$f\big((x, y, z)\big)$$
$$= \big((9+4i)x+(9+3i)y+(6+6i)z, -(8+4i)x-(8+3i)y-(6+6i)z, -2x-2y-z\big).$$

Déterminer la matrice A de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$

c. Calculer A^6. Soit $\vec{v} = (0, 0, -i)$. Donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f^6(\vec{v})$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f\big((x, y)\big) = (4x + 6y, -3x - 5y).$$

a. Calculer

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Déterminer les zéros de P et leurs ordres de multiplicité.

b. Lorsque λ est un zéro de P, déterminer le noyau de $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

c. Utiliser les questions précédentes pour trouver une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale.