CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 22/11/2021.
Réduction des endomorphismes. Diagonalisation

Sauf mention contraire, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1.

a. Dire sans calcul si les matrices suivantes sont diagonalisables:

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $(a - X)^n$. Montrer que $f = a \operatorname{Id}_E$ ou que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.

a. Pour chacune des matrices M réelles suivantes, calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants. Déterminer si la matrice est diagonalisable. Si elle est diagonalisable, donner une matrice P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

a. Soit $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser A.

b. A l'aide de la question précédente, déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 4.

a. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 := f$ (ou $f^2 = f \circ f$). On dit que f est une *projection* (ou plus précisément la projection sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$). Déterminer la restriction de f à $\operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$.

c. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$ et que f est diagonalisable.

d. En utilisant les questions précédentes, montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. Déterminer une base de diagonalisation.

Exercice 5.

a. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \operatorname{Id}_E$ (on dit que f est une symétrie). Montrer que $\frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E + f)$ est une projection.

b. A la lumière de l'exercice 4 et de la question précédente, que peut-on dire des valeurs propres de f? Montrer que f est diagonalisable.

c. Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -3+3i \\ 6-2i & -4+i & -2+4i \\ 2i & -i & -2-i \end{bmatrix}$ et donner ses valeurs propres.