CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 229/11/2021.
Trigonalisation. Application de la Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 16 & -7 & -14 \\ 4 & 0 & -4 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Les endomorphismes $f_1, \dots f_4$ de $\mathbb{R}^3$ définis par les formules suivantes sont-ils diagonalisables? Trigonalisables? Pour chacun des endomorphismes, donner une base de diagonalisation ou de trigonalisation:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 13x - y + 13z \\ 13x + 14z \\ -9x - 10z \end{pmatrix}, \quad f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x - 3y + 3z \\ 3x - y + 3z \\ -3x + 3y - z \end{pmatrix},$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + 3y - 2z \\ -x + z \\ x + 2y \end{pmatrix}, \quad f_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4x - 4y + z \\ 6x + 5y \\ 6x + 4y + z \end{pmatrix},$$

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A? Montrer que 0 est valeur propre, et déterminer la dimension du sous-espace propre correspondant.

b. Déterminer toutes les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

c. Plus généralement, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la trace d'une matrice de rang 1 pour qu'elle soit diagonalisable.

Application aux suites définies par une relation de récurrence.

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$(f_0, f_1) = (a, b), \quad \forall n \geq 1,\ f_{n+1} = f_{n-1} + f_n.$$

a. Pour tout $n \geq 0$, on pose $F_n = \left(\begin{smallmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1} = AF_n$.

b. Diagonaliser ou trigonaliser A. En déduire une expression de A^n pour tout $n \geq 0$.

c. Calculer F_n puis f_n pour tout n. Dans le cas $(a, b) = (0, 1)$ (*suite de Fibonnaci*), déterminer un équivalent simple de f_n quand $n \to \infty$.

d. A quelle condition sur a et b la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est-elle bornée?

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$(u_0, u_1) = (a, b), \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = -4u_{n-1} + 4u_n.$$

a. Pour tout $n \geq 0$, on pose $U_n = \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 0$, $Bu_{n+1} = Bu_n$.

b. Calculer les valeurs propres de B, et diagonaliser ou trigonaliser B. En déduire une expression de B^n pour tout $n \geq 0$.

c. Calculer U_n puis u_n pour tout n. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$, en fonctions de a et b.

Applications aux systèmes d'équations différentielles linéaires.

Exercice 6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au système d'équations différentielles:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

avec condition initiale

$$(y_1(0), y_2(0)) = (a, b).$$

a. Soit $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver une matrice A tel que $Y' = AY$.

b. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

c. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = P^{-1}Y$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par X? En déduire X, puis Y.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que Y reste bornée[1] quand $t \to +\infty$. Même question pour $t \to -\infty$. Pour quelles valeurs de a et b est-ce que Y est bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse maintenant à l'un des systèmes d'équations différentielles:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = -7y_1(t) - 10y_2(t) \\ y_2'(t) = 5y_1(t) + 7y_2(t), \end{cases}$$

ou

$$(S_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = -4y_1(t) - 2y_2(t) \end{cases}$$

avec condition initiale

$$(y_1(0), y_2(0)) = (a, b).$$

Résoudre (S_1) (respectivement (S_2)) avec la même stratégie que l'exercice précédent. Répondre également à la question d. de l'exercice précédent.

[1] c'est à dire pour que y_1 et y_2 restent bornées