CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 08/12/2021.
Formes bilinéaires. Produits scalaires

Exercice 1.

a. Les applications suivantes de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles des formes bilinéaires? Si c'est le cas, donner les formes quadratiques associées. Déterminer si elles sont symétriques, positives, définies positives. Dire si ce sont des produits scalaires. Donner leur matrice dans la base indiquée.

$$\varphi_1(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1-x_2)(y_1-y_2), \quad E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\varphi_2(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2, \quad E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi_3(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3, \quad E = \mathbb{R}^3,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi_4(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2, \quad E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

b. En utilisant la formule de changement de base, déterminer la matrice de φ_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et la matrice de φ_3 dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 2. Déterminer les formes polaires associées aux formes quadratiques suivantes:

$$q_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3x_4, \quad x \in \mathbb{R}^4$$
$$q_2(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit φ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1y_2 + x_2y_2 + \lambda(x_1y_2 + x_2y_1).$$

a. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

b. Pour $\lambda = 0$, puis $\lambda = 2$, puis $\lambda = 1$, φ est-il un produit scalaire?

c. Déterminer l'ensemble des réels λ pour lesquels φ est un produit scalaire.

Exercice 4. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n des polynômes réels de degré au plus n, $\mathbb{R}_n[X]$. On fixe $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts.

a. Démontrer que

$$\langle P, Q \rangle := \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Est-ce toujours un produit scalaire si les x_k ne sont plus deux à deux distincts?

Exercice 5. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.