CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 15/12/2021.
Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à des vecteurs bien choisis, démontrer les inégalités suivantes. Discuter les cas d'égalité.

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{1}$$

$$\forall f \in C^0([-1,1], \mathbb{R}), \quad \left|\int_{-1}^{1} f(t)dt\right| \leq \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1} f^2(t)dt}. \tag{2}$$

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt.$$

Démontrer que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $p \geq 0$, on a $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Exercice 3. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ mais que ce n'est pas une norme euclidienne. Dessiner la sphère de centre 0 et de rayon 1: $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|_1 = 1\right\}$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien.

a. Démontrer l'équivalence:

$$u \perp v \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|u + \lambda v\| \geq \|u\|.$$

b. Illustrer cette propriété par un dessin.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ à valeurs réelles. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Pour $k = 1, \ldots, n$, on pose

$$e_k(x) = \sin(kx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

a. Montrer que la famille $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est orthonormale.

b. Soit E_n l'espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de E_n? Montrer

$$\forall f \in E_n, \quad \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin(kx)f(x)dx\right)^2.$$