CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 12/01/2021.
Orthogonalité. Base orthonormale

Exercice 1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace euclidien E. Exprimer $(F \cup G)^{\perp}$ en fonction de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

Exercice 2. Soit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien usuel.

a. La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

b. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$. Donner les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

c. Soit $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$. Soit f la projection orthogonale sur F. Calculer $f\big((x_1, x_2, x_3)\big)$ en fonction de x_1, x_2 et x_3. Déterminer la distance de $x = (x_1, x_2, x_3)$ à F.

d. Donner une base orthonormée de $F^{\perp}$, et g la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Calculer $g\big((x, y, z)\big)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 3. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ défini par:

$$\langle x, y \rangle_a = x_1 y_1 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, Construire une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 2z = 0$.

a. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{\perp}$.

b. Déterminer une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F := \Big\{ (x_j)_j \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Big\}.$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien usuel.

a. Déterminer des bases orthonormales de F et de $F^{\perp}$.

b. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

d. Pour tout $u = (u_j)_{1 \le j \le 4}$, déterminer la distance $d(u, F)$ de u à F.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pout tout (x, y) de E^2, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)^{\perp}$.