CP2i2. Mathématiques. Travaux dirigés du 27/01/2021.
Polynômes de Legendre

On considère sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)dx.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, i.e.

$$\|P\|^2 = \int_{-1}^{+1} P^2(x)dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes unitaires de degré n obtenu à partir de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1. Déterminer P_0, P_1, P_2.

2. En utilisant que $P_n \in \{1, X, \dots, X^{n-1}\}^{\perp}$, montrer

$$\forall n \geq 1, \quad \langle X^n, P_n\rangle = \langle XP_{n-1}, P_n\rangle = \|P_n\|^2.$$

3. Justifier que $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, XP_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En écrivant le développement de P_n dans cette base, montrer qu'on a, pour tout $n \geq 2$,

$$P_n = XP_{n-1} - \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} P_{n-2}. \tag{1}$$

4. Soit E_n l'orthogonal de $(1, X, \dots, X^{n-1})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la dimension de E_n? Donner une base de E_n.

5. Soit Q_n le polynôme défini par

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^n\right).$$

Quel est le degré de Q_n? Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, pour toute fonction de classe C^k f sur $[-1, +1]$, on a

$$\int_{-1}^{+1} Q_n(x)f(x)dx = \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left((1-x^2)^n\right) f^{(k)}(x)dx,$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f.

6. Montrer que $Q_n \in E_n$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = \alpha_n Q_n$. Déterminer α_n.

7. Soit $I_n = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx$. On donne

$$I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \tag{2}$$

Calculer $\int_{-1}^{+1} Q_n(x)x^n dx$. En déduire $\|P_n\|^2$ en utilisant les questions **5** et **2**.

8. Expliciter la formule (1) à l'aide de la question précédente. Calculer P_3 et P_4.

9. Déterminer le polynôme A_2, de degré 2 tel que

$$\|A_2 - X^3\| = \min_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|P - X^3\|.$$

10. On peut définir un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $C^0([-1,+1],\mathbb{R})$ par les mêmes formules que précédemment. Soit $f \in C^0([-1,+1],\mathbb{R})$. A l'aide des polynômes P_n, et en utilisant une projection, déterminer:

$$\min_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-f\|$$

et le polynôme $P(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|P(f)-f\| = \min_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-f\|.$$

11. Montrer que P_n a n racines simples, et qu'elles sont toutes localisées sur $]-1,1[$. On pourra démontrer ce résultat sur Q_n, en montrant par récurrence sur k que $\frac{d^k}{dx^k}\left((1-x^2)^n\right)$ a exactement k racines sur $]-1,1[$.

12. Appendice: calcul de I_n. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire la formule (2) proposée pour I_n. En déduire également l'*intégrale de Wallis*:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(x)dx.$$

Chercher (en ligne ou dans un livre d'analyse mathématique) les valeurs de ces intégrales, et vérifier que ces valeurs coïncident avec ce que vous avez trouvé.

Commentaire. Les polynômes de Legendre sont un cas particulier de polynômes orthogonaux. Le cadre général est le suivant: on considère une fonction ω positive ou nulle, continue, non identiquement nulle, à support compact (ou décroissant plus vite que toutes les puissances de x à l'infini). On définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P,Q\rangle_\omega = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)\omega(x)dx.$$

Une suite de polynôme orthogonaux pour le poids ω est une suite de polynôme réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que P_n est de degré n et qui est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$. L'existence d'une telle suite se démontre à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Les polynômes orthogonaux sont définis a priori à une constante multiplicative près, et il faut toujours faire un choix de normalisation. Dans l'exercice précédent, on a choisi cette constante pour que les polynômes P_n soient unitaires. Signalons toutefois que la normalisation la plus courante pour les polynômes de Legendre est de choisir la constante devant X^n pour que $P_n(1) = 1$.

Les propriétés que l'on a démontrées ici pour les polynômes de Legendre (relation de récurrence, formule explicite avec une dérivée n-ième, propriétés des racines, etc...) ont des analogues pour les polynômes orthogonaux.

Le lecteur intéressé pourra faire des recherches sur les polynômes d'Hermite, de Laguerre, de Tchebychev qui sont tous des polynômes orthogonaux.