CP2I2. Mathématiques. Correction du contrôle continu du 01/12/2021 (première version)

Questions de cours (2,5 points). *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

(1) *Donner la définition d'une valeur propre de f.* Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f quand il existe $v \in E$, non nul, tel que $f(v) = \lambda v$.

(2) *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Donner la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$.* La matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice $n \times n$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}$.

Barème: définition d'une valeur propre de f: 1. Définition de la matrice de représentation: 1,5.

Exercice (5,5 points). *Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

(1) *Donner le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et les dimensions de ses sous-espaces propres selon la valeur de m.* Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. A a deux valeurs propres, 1 et 3.

La valeur propre 3 est d'ordre de multiplicité (géométrique) 1. Le sous-espace propre correspondant est donc obligatoirement de dimension 1.

Soit $E_1(A)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} my + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (m-4)y = 0 & (L_1) - 2(L_2) \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Si $m \neq 4$, on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff y = z = 0$. Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1. Si $m = 4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff 2y + z = 0$. Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2.

(2) *A quelle condition sur m la matrice A est-elle diagonalisable? Lorsqu'elle est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.* La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) + \dim E_3(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. D'après la question précédente, cette condition est équivalente à $\underline{m = 4}$. On a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où P est la matrice de passage de la base canonique a une base de vecteurs propres (u, v, w) (u étant vecteur propre associé à la valeur propre 3 et v, w associés à 1). Un calcul direct montre que l'on peut prendre $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ convient.

Barème: Polynôme caractéristique de A: 0,5. Valeurs propres: 0,5. Dimensions des sous-espaces propres selon la valeur de m: 2. Condition sur m pour la diagonalisation (avec justification): 1. Matrice P: 1,5.

CP2I2. Mathématiques. Correction du contrôle continu du 01/12/2021 (deuxième version)

Questions de cours (2,5 points). *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

(1) *Soit λ une valeur propre de f. Donner la définition du sous-espace propre de f associé à λ.* Le sous-espace propre de f associé à λ est

$$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \Big\{ v \in E \mid f(v) = \lambda v \Big\}.$$

(2) *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Donner la définition de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$.* La matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice $n \times n$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}$.

Barème: Définition du sous-espace propre: 1. Définition de la matrice de représentation: 1,5.

Exercice (5,5 points). *Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

(1) *Donner le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et les dimensions de ses sous-espaces propres selon la valeur de m.* Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)$. A a deux valeurs propres, 1 et -1.

La valeur propre 1 est d'ordre de multiplicité (géométrique) 1. Le sous-espace propre correspondant est donc obligatoirement de dimension 1.

Soit $E_{-1}(A)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff \begin{cases} y + mz = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (m-3)z = 0 & (L_1) - \dfrac{1}{2}(L_2) \\ 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

Si $m \neq 3$, on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff y = z = 0$. Donc $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1. Si $m = 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff 2y + 6z = 0$. Donc $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2.

(2) *A quelle condition sur m la matrice A est-elle diagonalisable? Lorsqu'elle est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.* La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) + \dim E_3(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. D'après la question précédente, cette condition est équivalente à $\underline{m = 3}$. On a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, où P est la matrice de passage de la base canonique a une base de vecteurs propres (u, v, w) (u étant vecteur propre associé à la valeur propre 1 et v, w associés à -1). Un calcul direct montre que l'on peut prendre $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

Barème: Polynôme caractéristique de A: 0,5. Valeurs propres: 0,5. Dimensions des sous-espaces propres selon la valeur de m: 2. Condition sur m pour la diagonalisation (avec justification): 1. Matrice P: 1,5.