7/7

CP2I2. MATHÉMATIQUES. CONTRÔLE CONTINU DU 29/11/2022

NOM: **Prénom:**

1: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1,5 = 0,5+0,5+0,5

Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Justifier que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[-(3-\lambda)(1+\lambda)+4\right]$$
$$= (4-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda+1\right] = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{4;1\}$. χ_A est scindé donc A est trigonalisable

2: Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

2,5 = 1+1+0,5

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est

$$E_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ -2x-2y+z=0 \\ 3z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

$E_1(A)$ a pour base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\mu_a(1) = 2 > \mu_g(1) = 1$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est

$$E_4(A) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \iff \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -2x-5y+z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -9y-z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-7y \\ z=-9y \end{cases}$$

$E_4(A)$ a pour base $\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}\right\}$

1,5 **3:** Déterminer une matrice 3×3 inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. On explicitera la matrice T obtenue.

P : 1

$P^{-1}AP$: 0,5

Il suffit de compléter la famille libre de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix}-7\\1\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ en une base de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ convient.

On a $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Donc si $P = \begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -9 & 0 & 0\end{bmatrix}$, on a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1,5 **4:** Déterminer une base de chacun des sous-espaces caractéristiques de A.

1+0,5

. Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est $\operatorname{Ker}(A-I_3)^2$. On a bien sûr $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-I_3) \subset \operatorname{Ker}(A-I_3)^2$

De plus, d'après la question précédente

$(A-I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-I_3)$ donc $(A-I_3)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$,

ce qui montre qu'une base de $\operatorname{Ker}(A-I_3)^2$: $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

Si l'on n'avait pas trouvé $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ à la question précédente, il aurait fallu calculer ce noyau avec la formule $(A-I_3)^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$

. Le sous-espace caractéristique associé à 4 est $\operatorname{Ker}(A-4I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-7\\1\\-9\end{pmatrix}\right)$

7/7

CP2I2. Mathématiques. Contrôle continu du 29/11/2022

NOM: **Prénom:**

1,5

1: Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

0,5+0,5+0,5

Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Justifier que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left(\lambda(2+\lambda)+1\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+1)^2$$

$Sp(A) = \{-1, 3\}$. χ_A est scindé donc A est trigonalisable.

2,5

2: Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

1+0,5+0,5

. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, noté $E_{-1}(A)$ est $\operatorname{Ker}(A+I_3) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 4z=0 \end{cases}$

$\iff (x=y \text{ et } z=0)$

Une base de $E_{-1}(A)$ est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\mu_a(-1) = 2 > \mu_g(-1) = 1$. Donc A n'est pas diagonalisable

. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est

$E_3(A) = \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \iff \begin{cases} -5x+y+z=0 \\ -x-3y+z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 16y-4z=0 \\ -x-3y+z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z=4y \\ x=y \end{cases}$

Une base de $E_3(A)$ est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

1,5 **3:** Déterminer une matrice 3×3 inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. On explicitera la matrice T obtenue.

1+0,5 Il suffit pour cela de compléter la famille libre de vecteurs

P $P^{-1}AP$ propres $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ en une base. On considère par exemple :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \text{Puisque } A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

on voit que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

avec $$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1,5 **4:** Déterminer une base de chacun des sous-espaces caractéristiques de A.

1+0,5 Par chance, on a trouvé un vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, non lié à $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ tel que $(A+I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I_3)$,

et donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I_3)^2$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est une base de l'espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A+I_3)^2$. Si on n'avait pas trouvé $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dans la question précédente, il aurait fallu calculer $\operatorname{Ker}(A+I_3)^2 = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \cancel{\operatorname{Ker}} \{(x,y,0) ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

- Le sous-espace caractéristique associé à la v.p 3 est égal à son sous-espace propre, soit $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$