Analyse harmonique appliquée/traitement du signal 2021/2022

Correction du devoir à la maison

Exercice 1

1) h est continue par morceaux et $|h(t)| \leq \exp(-t)\, 1\!\!1_{[0,\infty[}(t)$

Donc $h \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

2) La fonction de transfert $H(\lambda)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$H(\lambda) = \hat{h}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda t} h(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-2i\pi\lambda t - t} \sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{-2i\pi\lambda t + it - t} - e^{-2i\pi\lambda t - it - t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+2i\pi\lambda - i} - \frac{1}{1+2i\pi\lambda + i}\right) = \frac{1}{(1+i+2i\pi\lambda)(1-i+2i\pi\lambda)}$$

$$= \frac{1}{-4\pi\lambda^2 + 4i\pi\lambda + 2}$$

3) $H(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} |H(\lambda)| = 0$

A est (à une constante multiplicative près) un filtre passe-bas.

4) $\operatorname{supp} h \subset [0,\infty[$ donc A est causal

$h \in L^1(\mathbb{R})$ donc A est stable

Exercice 2

1) Les coefficients de Fourier de y, considéré comme une fonction $2T$-périodique, sont donnés par :

$$c_n(y) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y(t)\, e^{-\frac{in\pi t}{T}}\, dt = A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{in\pi t}{T}}\, dt$$

<u>Remarque</u>: il y avait une erreur dans l'énoncé. Il fallait lire "$2T$-périodique" au lieu de "T-périodique". Une fonction constante sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ et T-périodique est constante sur $\mathbb{R}$, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls sauf c_0 !

$$c_n(y) = \frac{i}{2T} \times \frac{T}{n\pi}\left[A e^{-\frac{in\pi t}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{Ai}{2n\pi}\left(e^{-\frac{in\pi}{2}} - e^{\frac{in\pi}{2}}\right) = \frac{A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$c_n(y) = \frac{A}{n\pi} \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2) Par définition

$$c_k^{2N}(z) = \frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{2N-1} z_m e^{-\frac{2imk\pi}{2N}} = \frac{A}{2N}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{imk\pi}{N}}$$

$$= \frac{A}{2N} e^{\frac{ik\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{imk\pi}{N}} = \frac{A}{2N} e^{\frac{ik\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1-e^{-ik\pi}}{1-e^{-\frac{ik\pi}{N}}}\right)$$

$$= \frac{A}{2N} e^{+\frac{ik\pi}{2N}} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\sin\frac{k\pi}{2N}} \quad \text{si } k \not\equiv 0\ [2N]$$

$$c_k^{2N}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{0, .., 2N-1\} \text{ est pair}, \neq 0 \\ \frac{A}{2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{A}{2N}\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{2N}}}{\sin\frac{k\pi}{2N}}(-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

3) $\hat{x}(\lambda) = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2i\pi\lambda t} dt = A \dfrac{e^{-2i\pi\lambda\frac{T}{2}} - e^{2i\pi\lambda\frac{T}{2}}}{-2i\pi\lambda}$

$= A \dfrac{\sin(\pi\lambda T)}{\pi\lambda} = AT \operatorname{sinc}(T\lambda)$

4) Si l'on fait $T=1$, $A=1$ dans la question précédente, on obtient $x(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ et $\hat{x}(\lambda) = \operatorname{sinc}(\lambda)$

Donc, par la formule d'inversion de Fourier,

$\overline{\mathcal{F}}(\operatorname{sinc}) = x = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

Puisque les fonctions considérées sont paires, on en déduit $\widehat{\operatorname{sinc}}(\lambda) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda)$

$\widehat{\operatorname{sinc}}(\lambda) = 0 \iff |\lambda| > \lambda_c$

La fréquence de coupure est $\lambda_c = \frac{1}{2}$