Exercice 1

a) $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\, id_E)$

c'est un polynôme en λ.

Par définition d'une valeur propre, $f - \mu\, id_E$ est non-inversible

Donc $\chi_f(\mu) = 0$

b) Par définition, le sous espace propre de f associé à μ est $E_f(\mu) = \mathrm{Ker}(f - \mu\, id_E)$

c) La multiplicité algébrique de la valeur propre μ de f, $m_a(\mu)$ est la multiplicité de μ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_f.

La multiplicité géométrique $m_g(\mu)$ est la dimension du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f - \mu\, id_E)$

On a $m_g(\mu) \leq m_a(\mu)$.

d) Le sous-espace caractéristique associé à μ est

$N_f(\mu) = \mathrm{Ker}\,(f - \mu\, id_E)^{m_a(\mu)}$. Sa dimension est exactement $m_a(\mu)$

e) f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour toute valeur propre μ de f, $m_g(\mu) = m_a(\mu)$

f) Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $Sp(A) = \{1, 2\}$.

$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ $m_a(1) = 2$ $m_a(2) = 1 = m_g(2)$ $m_g(1) = 1$

Sous-espaces propres : associé à 1 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ associé à 2 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Sous-espaces caractéristiques : associé à 1 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ à 2 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Exercice 2

a) $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left[(2-\lambda)^2 - 3\right] + 2\left[2(2-\lambda) - 3\right]$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 4\lambda + 1\right] + 2\left[-2\lambda + 1\right]$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 2

b) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_A(2) = \ker(A - 2I_3) \iff \begin{cases} -2y = 2x \\ 2x + 2y + 3z = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = -\frac{2}{3}x \end{cases}$$

$E_A(2)$ a pour base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_A(1) = \ker(A - I_3) \iff \begin{cases} -2y = x \\ 2x + 2y + 3z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y \\ -3y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}$$

$E_A(1)$ a pour base $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) La multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est 2, et sa multiplicité géométrique 1. D'après la question e) de l'exercice précédent, A n'est pas diagonalisable.

En revanche, χ_A est scindé donc A est trigonalisable.

On complète la famille libre de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ en une base de $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$ (c'est bien une base car $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\-3 & 1 & 0\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$)

On a $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{où } P = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\-3 & 1 & 0\\-2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Exercice 3

a) $$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix}-8-\lambda & -7 & -14\\14 & 13-\lambda & 14\\0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix}-8-\lambda & -7\\14 & 13-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\left[(8+\lambda)(\lambda-13) + 98\right]$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 6) = (6-\lambda)^2(\lambda+1)$$

Les valeurs propres de B sont 6 et -1

b) Valeur propre -1

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B+I_3) \iff \begin{cases}-8x - 7y - 14z = -x\\14x + 13y + 14z = -y\\6z = -z\end{cases} \iff \begin{cases}x = -y\\z = 0\end{cases}$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_B(-1)$

Valeur propre 6

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B-6I_3) \iff \begin{cases}-8x-7y-14z=6x\\14x+13y+14z=6y\\6z=6z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-14x-7y-14z=0\\14x+7y+14z=0\end{cases}$$

$$\iff 2x+y+2z=0$$

$$\iff y=-2x-2z$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(B-6I_3)$

c) Le polynôme caractéristique de B est scindé. Donc B est trigonalisable.

En fait $m_a(-1)=m_g(-1)=1$ et $m_a(6)=m_g(6)=2$, donc B est diagonalisable

On a $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

Exercice 4

a) Soit v un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

On a $f^k(v)=\lambda^k v$. Donc

$0=\left(f^3+(1-i)f^2-if\right)(v)=\left(\lambda^3+(1-i)\lambda^2-i\lambda\right)v.$

Puisque $v\neq 0$, on en déduit $\lambda^3+(1-i)\lambda^2-i\lambda=0$

On a déduit $\lambda(\lambda^2+(1-i)\lambda-i)=0$

Det, le discriminant de $\lambda^2+(1-i)\lambda-i$ est

$\Delta=(1-i)^2+4i = -2i+4i = 2i = (1+i)^2$

et ses deux racines sont $\frac{i-1\pm(1+i)}{2}$ soit i et -1

On a donc bien $\lambda\in\{i,0,-1\}$

b) Soit $m_a(\lambda)$ la multiplicité algébrique de chacune des valeurs propres $\lambda\in\{i,0,-1\}$. (erreur dans l'énoncé.

alors : $m_a(i)\,i - m_a(-1) = \mathrm{Tr} f = i-1$

Donc $m_a(i)=1$ $m_a(-1)=1$

Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$ et la somme des multiplicités algébriques est égalemement 4. Donc $m_a(0)=2$.

c) On a $1\le m_g(0)\le m_a(0)=2$.

Si $m_g(0)=1$, i.e Ker f est de dimension 1, f est de rang $4-1=3$. f n'est pas diagonalisable.

Si $m_g(0)=2$, Ker f est de dimension 2 et rang f est $4-2=2$

de plus $m_g(0)=m_a(0)=2$ et f est diagonalisable