CP2I2. Mathématiques. Correction de l'examen du 10/12/2021

Exercice 1 (Questions de cours). *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*

a. *Donner la définition de la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$.*

La matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, est la matrice $n \times n$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

b. *On suppose $n = 3$, et que f est l'endomorphisme tel que $f(e_1) = e_1 - e_3$, $f(e_2) = 3e_2$, $f(e_3) = 2e_2 + 4e_3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. *Donner la définition du polynôme caractéristique χ_f de f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur χ_f pour que f soit trigonalisable.*

Par définition, $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.

d. *Donner une condition suffisante sur χ_f pour que f soit diagonalisable. Montrer par un contre-exemple explicite que cette condition n'est pas nécessaire.*

Si χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable. Cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple la matrice de $f = \mathrm{Id}_E$ dans n'importe quelle base est I_n, mais la seule racine de son polynôme caractéristique $(1-\lambda)^n$ n'est pas simple dès que $n \geq 2$.

e. *Donner l'exemple d'une matrice 2×2 trigonalisable qui n'est pas diagonalisable. On prendra bien soin de justifier que la matrice n'est pas diagonalisable.*

Considérons la matrice triangulaire $M = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. La matrice M a pour seule valeur propre 0. Si M était diagonalisable, on aurait alors $P^{-1}MP = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, pour une matrice 2×2 inversible P, et donc M serait égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas la cas. La matrice M n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 2. *Soit A la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -6 & -14 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

a. *Calculer le polynôme caractéristique de A. Donner les valeurs propres de A.*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda) \left| \begin{smallmatrix} -6-\lambda & -14 \\ 3 & 7-\lambda \end{smallmatrix} \right| = -\lambda(1-\lambda)^2,$$

Les valeurs propres de A sont 0 et 1.

b. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.*

Les sous espaces propres de A sont $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\mathrm{Ker}\, A$.

Puisque $A - I_3 = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \iff x + 2y = 0$.

Une base de $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est donc donnée par $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

D'autre part

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A \iff \begin{cases} -6x - 14y = 0 \\ 3x + 7y = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

La première ligne de ce système est égale à -2 fois la deuxième. On peut donc l'ignorer. En éliminant la variable x dans la dernière ligne (par l'opération $(L_3) \leftarrow (L_3) - \frac{2}{3}(L_2)$), on obtient

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

c. *Dire si A est trigonalisable, puis si A est diagonalisable. Déterminer une matrice 3×3 inversible P telle que*

$$P^{-1}AP \textit{ soit } \begin{cases} \textit{diagonale} & \textit{si } A \textit{ est diagonalisable.} \\ \textit{triangulaire supérieure} & \textit{si } A \textit{ est trigonalisable, non diagonalisable.} \end{cases}$$

Donner également $P^{-1}AP$.

La matrice A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est exactement $3 = \dim \mathbb{R}^3$. On considère la base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de f, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, et la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de la base canonique à $\mathcal{B}$. Alors $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1,1,0)$.

Exercice 3. *Soit $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Répondre aux questions a,b et c de l'exercice précédent en remplaçant A par B.*

a.

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2+2\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix},$$

par les opérations $(L_1) \leftarrow (L_1) - 2(L_2)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) + 2(L_2)$. En mettant en facteur $1 + \lambda$ à la première et la troisième ligne, on obtient

$$\chi_B(\lambda) = (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda+2).$$

Les valeurs propres de B sont -1 et -2.

b. Les sous-espaces propres de B sont $\operatorname{Ker}(B + I_3)$ et $\operatorname{Ker}(B + 2I_3)$. Par définition

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B + I_3) \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0.$$

L'espace $\operatorname{Ker}(B + I_3)$ a donc pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

D'autre part,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B + 2I_3) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = 0, \end{cases}$$

par les opérations $(L_1) \leftarrow (L1) - 3(L_2)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) + 2(L_2)$. On en déduit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B + 2I_3) \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

On on déduit $\mathrm{Ker}(B + 2I_3) = \mathrm{vect} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c. La somme des dimensions des sous-espaces propres est 3, égale à la dimension de l'espace considéré, $\mathbb{R}^3$. La matrice B est donc diagonalisable. On pose

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B et

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. *Soit $(y_k)_{k \geq 1}$ la suite réelle définie par*

$$y_0 = a,\ y_1 = b,\ \forall k \geq 0,\ y_{k+2} = y_{k+1} + 2y_k.$$

a. *Soit $Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $\forall k \geq 0, \quad Y_{k+1} = MY_k$.*

$$Y_{k+1} = \left(\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ 2y_k + y_{k+1} \end{pmatrix}\right) = MY_k \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. *Calculer le polynôme caractéristique de M. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.*

Le polynôme caractéristique est donné par $\chi_M(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Les valeurs propres sont -1 et 2. Un calcul direct montre que $\mathrm{Ker}(M + I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Ker}(M - 2I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. On a donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. *Calculer M^k pour tout $k \geq 0$. En déduire y_k en fonction de a et b.*

Par la formule de l'inverse d'une matrice en dimension 2, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} M^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 2^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ 2(-1)^{k+1} + 2^{k+1} & (-1)^{k+2} + 2^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par une récurrence évidente, $Y_k = M^k Y_0$. On en déduit

$$y_k = \frac{1}{3}\left[\left(2(-1)^k + 2^k\right)a + \left((-1)^{k+1} + 2^k\right)b\right].$$

On vérifie que cette formule donne bien $y_0 = a$ et $y_1 = b$.

d. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty.$$

L'expression de y_k trouvée à la question précédente donne

$$y_k = \frac{2^k}{3}(a+b) + \frac{(-1)^k}{3}(2a-b).$$

Si $a+b=0$, la suite $(y_k)_k$ est bornée. Sinon, $y_k \sim \frac{2^k}{3}(a+b)$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty \iff a+b<0.$$