Théorie des distributions

Examen final 14/10/2019

Correction

Exercice 1

1.1) $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ signifie que les 2 conditions suivantes sont vérifiées:

(i) il existe un compact K de Ω tel que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ $\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha (\varphi-\varphi_n)(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1.2) $\operatorname{supp}\varphi_n = \{x+n;\ x \in \operatorname{supp}\chi\}$. La condition (i) de la définition précédente n'est pas vérifiée, ce qui montre que $(\varphi_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\Omega)$

1.3) Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que, si $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\lim_{n\to\infty} \langle T,\varphi_n\rangle = \langle T,\varphi\rangle$ dans $\mathbb{C}$.

De manière équivalente (les deux définitions étaient acceptées), c'est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que, pour tout compact K de Ω, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que:

$(*)$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$; $\quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq N \\ x \in K}} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|$

où $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à support compact inclus dans K.

1.4) Lorsque l'entier N dans l'inégalité $(*)$ peut être pris indépendant du compact K, on dit que T est d'ordre fini. Le plus petit N possible tel que pour tout compact K de Ω, il existe $C > 0$ vérifiant $(*)$ est appelé ordre de T

1.5) Par définition,

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; $\quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

On a donc

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$; $\quad |\langle \delta_a, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$

ce qui montre que φ est une distribution d'ordre 0.

1.6) $\partial_x^\alpha f$ signifie $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f$

Par définition,

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, $\quad \langle \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle$

1.7) On a, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$

Donc $|\langle \delta_0', \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$, ce qui montre que δ_0' est une distribution au plus d'ordre 1.

Pour montrer que ce n'est pas une distribution d'ordre 0, on raisonne par l'absurde.

Si δ_0' était une distribution d'ordre 0, il existerait une constante C telle que

(A) $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{[-1,+1]}(\mathbb{R})$, $\quad |\langle \delta_0', \varphi\rangle| = |\varphi'(0)| \leq C \sup_{x\in[-1,+1]} |\varphi(x)|$

On fixe χ, telle que $\chi'(0) \neq 0$, dans $\mathcal{C}^\infty_{[-1,+1]}(\mathbb{R})$ et on pose pour $\varepsilon \in]0,1]$, $\quad \chi_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Alors $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_{[-1,+1]}(\mathbb{R})$ et donc, par (A)

$$\frac{1}{\varepsilon}|\chi'(0)| = |\chi_\varepsilon'(0)| \leq C \sup_{x\in[-1,+1]} |\chi_\varepsilon(x)| = C \sup_{x\in[-1,+1]} |\chi(x)|$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient une contradiction puisque $\chi'(0) \neq 0$.

On a montré que δ_0' était d'ordre 1.

1.8) Par définition,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$$

1.9) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors

$$\langle (fT)', \varphi\rangle = -\langle fT, \varphi'\rangle = -\langle T, f\varphi'\rangle$$
$$= -\langle T, (f\varphi)'\rangle + \langle T, f'\varphi\rangle$$

$= \langle T', f\varphi \rangle + \langle f'T, \varphi \rangle$

$= \langle fT' + f'T, \varphi \rangle$

D'où $(fT)' = fT' + f'T$

Exercice 2

2.1) g est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. C'est donc un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On définit la distribution T_g par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) g(x)\,dx$$

On a de plus

$$|\langle T_g, \varphi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (2+x^2)\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|\,(2+x^2)^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}\,dx$$

ce qui montre que T_g est une distribution tempérée.

2.2) g est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En effet, $g_{|]-\infty,-1[}$, $g_{|]-1,1[}$ et $g_{|]1,+\infty[}$ (les restrictions de g à $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ respectivement) sont des fonctions polynômes, donc de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus, $\lim_{x \overset{<}{\to} \pm 1} g(x)$, $\lim_{x \overset{>}{\to} \pm 1} g(x)$, $\lim_{x \overset{<}{\to} \pm 1} g'(x)$ et $\lim_{x \overset{>}{\to} \pm 1} g'(x)$ existent dans $\mathbb{R}$. On en déduit que g est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En notant $g(a^{\pm})$ les limites à gauche et à droite de g en $a \in \mathbb{R}$, la formule des sauts donne:

$$(T_g)' = T_{g'} + \left(g(-1^+) - g(-1^-)\right)\delta_{-1} + \left(g(1^+) - g(1^-)\right)\delta_1$$

où g' désigne la dérivée de g au sens classique, définie presque partout sur $\mathbb{R}$.

On a bien évidemment $g'(x) = 2x$, et la formule des sauts s'écrit:

$$(T_g)' = 2x + 2\delta_{-1} - \delta_1$$

où on a identifié $x \mapsto 2x$ et la distribution qui lui est associée.

2.3) Par définition,

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \widehat{\delta_a}, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.a} \varphi(x)\, dx$$

Donc $\widehat{\delta_a} = e^{-ix.a}$

2.4) En notant 1 la fonction constante égale à 1 (et la distribution qui lui est associée), on obtient:

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(x)\, dx$$

$$= (2\pi)^d \varphi(0)$$

où on a utilisée la formule d'inversion de Fourier.

D'où $\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0$

2.5)

$$\widehat{\partial_{x_j} T} = i\xi_j \hat{T} \text{ et}$$

$$\widehat{x_j T} = i\partial_{\xi_j} \hat{T}$$

par le cours.

2.6) La transformation de Fourier de $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ est:

$$\widehat{id_{\mathbb{R}}} = i\partial_\xi \hat{1} = 2\pi i \delta_0'$$

2.7) Par la formule démontrée en 2.2),

$$\widehat{(T_g)'} = \widehat{2x} + 2\widehat{\delta_{-1}} - \widehat{\delta_1}$$

$$= 4\pi i \delta_0' + 2e^{ix} - e^{-ix}$$

Exercice 3

3.1) Montrons

$$\mathrm{supp}\, S = \{0\} \times [0,+\infty[= \{(0,x_2)\,;\ 0 \leq x_2\}$$

. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0,+\infty[)$

Alors $\varphi(0,x_2) = 0$ pour tout $x_2 \geq 0$ et donc $\langle S, \varphi \rangle = 0$. Ceci montre :

$$\mathrm{supp}\, S \subset \{0\} \times [0,+\infty[$$

. De plus, si on fixe une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$, $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$, $\chi(x) \geq 0$ pour tout x, on a, en notant, pour $y \in \mathbb{R}^2$

$$\chi\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right) : x \mapsto \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

$$\mathrm{supp}\, \chi\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right) \subset B(y,\varepsilon)$$

De plus, si $(0,y_2) = y \in \{0\} \times [0,+\infty[$, on a

$$\langle S, \chi\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right) \rangle = \int_0^{+\infty} \chi\left(0, \frac{x_2 - y_2}{\varepsilon}\right) dx_2$$

$$= \varepsilon \int_{-\frac{y_2}{\varepsilon}}^{+\infty} \chi(0,t_2)\, dt_2 \geq \varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $\langle S, \chi\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right) \rangle \neq 0$ pour tout ε, ce qui montre que $y \in \mathrm{supp}\, S$. Finalement :

$supp\, S = \{0\} \times [0, +\infty[$

3.2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle \frac{\partial S}{\partial x_2}, \varphi \rangle = - \langle S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \rangle$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0, x_2)\, dx_2$$

$$= \varphi(0,0)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \delta_{(0,0)}$$

Exercice 4

4.1) $$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u\right) = (i\xi_1)^4 \hat{u} - (i\xi_2)^6 \hat{u} + \hat{u}$$
$$= \left(\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1\right) \hat{u}(\xi)$$

où on a utilisé les formules de 2.5)

4.2) En prenant la transformée de Fourier de (E), on obtient :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1\right) \hat{u} = \hat{f}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{u} = \frac{1}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6} \hat{f}$$

On remarque que $\frac{1}{1+\xi_1^4+\xi_2^6}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée ainsi que toutes ses dérivées partielles. Le produit d'une telle fonction par un élément de $\mathcal{S}'$ est donc bien un élément de $\mathcal{S}'$!

On a donc montré que E a une unique solution $u \in \mathcal{S}'$, donnée par :

$$u = \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1+\xi_1^4+\xi_2^6} \hat{f} \right)$$

où $\bar{\mathcal{F}}$ est la transformée de Fourier inverse.

4.3) $f \in L^1$ donc $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\int \frac{1}{1+\xi_1^4+\xi_2^6} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)| \int \frac{d\xi}{1+\xi_1^4+\xi_2^6}$$

l'intégrale du membre de droite étant bien convergente. Donc

$$\xi \longmapsto \frac{1}{1+\xi_1^4+\xi_2^6} \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$$

La formule d'inversion de Fourier s'écrit :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.\xi} \hat{u}(\xi) \, d\xi$$

De plus
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{-ix\xi} \hat{u}(\xi)\right) = -i\xi_1 \frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi_1^4+\xi_2^6}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{-ix.\xi} \hat{u}(\xi)\right) = -i\xi_2 \frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi_1^4+\xi_2^6}$$

On vérifie que les fonctions

$$\xi \mapsto \frac{-i\xi_1}{1+\xi_1^4+\xi_2^6} \quad \text{et} \quad \xi \mapsto \frac{-i\xi_2}{1+\xi_1^4+\xi_2^4}$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}^2$, et donc que

$$\xi \mapsto \frac{-i\xi_j}{1+\xi_1^4+\xi_2^6}\,\hat{f}(\xi)$$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$!

En utilisant la continuité de $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$, on voit que l'on peut utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral, qui montre que u est de classe $\mathcal{C}^1$.