Examen du 3 mai 2012
Correction

Exercice 1

a) On utilise la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times 3\times(-1) + 0 + 4\times 2\times 1 - 1\times [redacted] \times(-2) - 1\times 2\times(-1) + 0$$

$$= -3 + 8 + 2 + 2 = 9$$

b) (i) $\det M_a = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $(L_4) \leftarrow (L_4) - (L_1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la 1ère ligne

$= 2a - a^2 = a(2-a)$

(ii) Si $a \neq 0$ et $a \neq 2$, $\det M_a \neq 0$. La matrice $M_a$ est donc inversible, ce qui montre qu'elle est de rang 4.

• $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le rang de $M_0$ est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes : $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (C_1, C_2, C_3, C_4)$

On a $C_3 = C_1 + C_2$. De plus, la famille $(C_1, C_2, C_4)$ est libre : si

$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_4 C_4 = 0$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$$

$\boxed{rg\, M_0 = 3}$

• $M_2 = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (C_1)\ (C_2)\ (C_3)\ (C_4) \end{array}$ On remarque que $C_2 = C_1 + C_3$

Donc $rg\, M_2 = rg \{C_1, C_3, C_4\}$

Montrons que $(c_1, c_3, c_4)$ est libre.

si $\lambda_1 c_1 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 = 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique immédiatement $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\boxed{rg\, M_2 = 3}$$

Exercice 2

a). $f(1,0,0) = (3,1)$ $\quad f(0,1,0) = (-2,-2)$

Donc $Vect((3,1), (-2,-2)) \subset Im f$.

La famille $(3,1), (-2,-2)$ est une famille libre de 2 éléments de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathbb{R}^2 \subset Im f$ et finalement

$$\boxed{Im\, f = \mathbb{R}^2}$$

. Soit $(x,y) \in Ker\, g$. Alors $x+y=0$ et $x-y=0$

Donc $x = y = 0$. D'où

$$\boxed{Ker\, g = \{0\}}$$

. $Im f = \mathbb{R}^2$ donc $f$ est surjective.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$.

donc $f$ ne peut pas être ~~surjective~~ injective.

. $\text{Ker } g = \{0\}$ donc $g$ est injective.
$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ et $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^4$, donc $g$ ne peut pas être surjective.

b) Soit $A$ la matrice de $f$ dans les bases canoniques, et $B$ la matrice de $g$ dans les bases canoniques.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(se lit directement sur les formules)

c) La matrice de $g \circ f$ est :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 16 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 3</u>

a) Le polynôme caractéristique de $f$ est donné par :

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 5 \\ -10 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(7+\lambda)(8-\lambda)+50$$
$$= \boxed{\lambda^2-\lambda-6}$$

b) Le discriminant de ce trinôme du second degré est : $\Delta = 1+24 = 25$.

Les deux valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$$

soit $\boxed{\lambda_1 = -2}$ $\boxed{\lambda_2 = 3}$

c) . $(x,y) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \, id_{\mathbb{R}^2})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 5y = -2x \\ -10x + 8y = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

On peut prendre $\boxed{\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

. $(x,y) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \, id_E)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 5y = 3x \\ -10x + 8y = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

$\boxed{\vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_2 = 3}$

d). Il suffit de montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est libre.

Si $\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} = (0,0)$, alors

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad (L_2 - L_1) : \alpha_2 = 0$$

ce qui implique $\alpha_1 = 0$.

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une famille libre de cardinal 2 dans $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

(On pouvait aussi utiliser que par le cours, la somme des sous espaces propres de $f$ est directe).

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En effet, $f(\vec{e_1}) = -2\vec{e_1}$
$f(\vec{e_2}) = 3\vec{e_2}$.

## Exercice 4

a) On utilise la méthode du pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_2) \leftarrow (L_2) + (L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad (L_2) \leftrightarrow (L_3)$$

On a ramené la matrice $P$ à une matrice inversible triangulaire supérieure par une série d'opérations élémentaires : elle est donc inversible.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow -(L_1) \\ (L_2) \leftarrow -(L_2) \\ (L_3) \leftarrow -(L_3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) + (L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad (L_1) \leftarrow (L_1) - 2(L_2)$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$, donc cette matrice est inversible, ce qui montre que $\tilde{\mathcal{C}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

· La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\tilde{\mathcal{C}}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

d) $\det \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 + 4 + 1 - 2 - 2 - 4 = 1$ (par la formule de Sarrus)

$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ est inversible (cf a)

La famille des vecteurs colonnes de $P$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{Mat_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = \left(Mat_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$ par

6 a)

c)
$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{C}) \\
Mat_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} \uparrow & & \uparrow Mat_{\mathcal{C}\to\tilde{\mathcal{C}}} \\
(\mathbb{R}^3, \tilde{\mathcal{B}}) & \xrightarrow[Mat_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}}}(f)]{} & (\mathbb{R}^2, \tilde{\mathcal{C}})
\end{array}$$

Par la formule de changement de base :

$$Mat_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}}}(f) = Mat_{\tilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\, Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, Mat_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

## Exercices

a) $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F)$

b) Montrons que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre.

On suppose $\lambda \vec{v_1} + \mu \vec{v_2} = 0$

alors
$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 0 \\ -\mu = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

Par la première ligne, $\mu = 0$, ce qui implique $\lambda = 0$ par n'importe quelle autre ligne.

c) $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$. Donc $E = \text{vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ et puisque $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre, c'est une base de E.

Par suite, $\dim E = 2$ et $\text{rg}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = 2$.

d) $(x, y, z, t) \in E$ si et seulement si l'équation (d'inconnues $\lambda$ et $\mu$) $(x, y, z, t) = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}$ a au moins une solution.

On écrit cette équation sous forme matricielle.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 2 & -3 & z \\ 2 & -2 & t \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & z + 2x \\ 0 & 2 & t + 2x \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (L_3) + 2L_1 \\ (L_4) + 2(L_1) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & z+2x+y \\ 0 & 0 & t+2x+2y \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3)+(L_2) \\ (L_3)+2(L_2) \end{matrix}$$

Final$^t$, $\boxed{(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x+2y+t=0 \end{cases}}$

e) (i). $2+1+2 \neq 0$ donc $(1,1,2,0) \notin E$

$E \cap F = \{0\}$. $\boxed{\dim E \cap F = 0}$

$\boxed{\dim F = 1}$

. $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E\cap F = 3$.

(ii) . $E \cap F = \{0\}$, la somme $E+F$ est donc directe.

. $\dim(E+F) = 3 < 4$. E et F ne sont donc pas supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

f) (i) Soit $\vec{u} = (x,y,z,t) \in E \cap F$.

puisque $\vec{u} \in F$, on a $z = t = 0$

donc $\vec{u} = (x,y,0,0)$

De plus, par d), $2x+y=0$ et $2x+2y=0$.

En soustrayant ces deux équations, il vient $y=0$,

puis $x=0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$

$E \cap F = \{\vec{0}\}$ $\boxed{\dim E \cap F = 0}$

. $F = \text{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ $\boxed{\dim F = 2}$

$\boxed{\dim(E+F)} = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = \boxed{4}$

(ii) $E \cap F = \{\vec{0}_E\}$ : la somme $E+F$ est directe.
de +, $\dim(E+F) = 4$. donc $E \oplus F = \mathbb{R}^4$, ce qui montre que E et F sont supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

g) (i) $(x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} z + 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

C'est un système de deux équations à quatre inconnues, non forme échelonnée.
donc $\boxed{\dim F = 4-2 = 2}$

$(x,y,z,t) \in E \cap F \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x+2y+t=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+2y+t=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z=0\ ;\ t=0\ ;\ x=-y \end{cases}$

La description des solutions du système montre qu'il y a 3 variables de base $(x,z,t)$ et une variable libre, $y$. Donc $\boxed{\dim E \cap F = 1}$

$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F = 3$

(ii) $\dim(E \cap F) \geq 1$ donc la ~~somme~~ $E+F$ n'est pas directe.

• par suite $E$ et $F$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

<u>Exercice 6</u> a) • Soit $y \in \mathrm{Im}(f^{n+1})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$

donc $y \in \mathrm{Im} f^n$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker} f^n$. Alors $f^n(x) = 0$

Donc $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x)$.

$$\| $$

$f(0) = 0$

Donc $f^{n+1}(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker} f^{n+1}$

b) • $\mathrm{Im} f^{n+1} \subset \mathrm{Im} f^n$, donc $\dim \mathrm{Im} f^{n+1} \leq \dim \mathrm{Im} f^n$, i.e $\mathrm{rg} f^{n+1} \leq \mathrm{rg} f^n$.

• $\mathrm{Ker} f^n \subset \mathrm{Ker} f^{n+1}$ donc $\dim \mathrm{Ker} f^{n+1} \geq \dim \mathrm{Ker} f^n$

• La suite $(\mathrm{rg} f^n)_n$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

• La suite $(\dim \mathrm{Ker} f^n)_n$ est croissante et majorée (par $\dim E$). Donc elle converge.

c) Une suite convergente d'entiers est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang) ce qui montre le résultat demandé.

d) Soit $n \geq n_0$. Par a) $\operatorname{Ker} f^{n_0} \subset \operatorname{Ker} f^{n}$.

Par c) $\dim \operatorname{Ker} f^{n} = \dim \operatorname{Ker} f^{n_0}$.

D'où $\operatorname{Ker} f^{n} = \operatorname{Ker} f^{n_0}$

De même par a) $\operatorname{Im} f^{n} \subset \operatorname{Im} f^{n_0}$ et par c) $\dim \operatorname{Im} f^{n} = \dim \operatorname{Im} f^{n_0}$. D'où

$$\operatorname{Im} f^{n} = \operatorname{Im} f^{n_0}.$$

e) par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f^{n_0} + \dim \operatorname{Ker} f^{n_0} = \dim E$

Il suffit donc de montrer $\operatorname{Ker} f^{n_0} \cap \operatorname{Im} f^{n_0} = \{\vec{0}_E\}$

Soit $\vec{y} \in \operatorname{Ker} f^{n_0} \cap \operatorname{Im} f^{n_0}$.

Alors $\vec{y} = f^{n_0}(\vec{x})$ pour un $\vec{x} \in E$.

De plus $f^{n_0}(\vec{y}) = \vec{0}_E$. Donc $f^{2n_0}(\vec{x}) = \vec{0}_E$

$\vec{x} \in \operatorname{Ker} f^{2n_0} = \operatorname{Ker} f^{n_0}$ par d).

Donc $\vec{y} = f^{n_0}(\vec{x}) = \vec{0}_E$

$\operatorname{Ker} f^{n_0} \cap \operatorname{Im} f^{n_0} = \{\vec{0}_E\}$ ce qui conclut la preuve.