Barème sur 43,5

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
EXAMEN FINAL

INSTITUT GALILÉE.
SUP GALILÉE, MACS 2, 2020-2021

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Sauf mention contraire, toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Dans tout l'examen, d est un entier naturel non nul. Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ etc...) sont les mêmes que dans le cours.

Exercice 1. $\boxed{13,5}$

2 **1.1)** Donner la définition de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$. Donner une distance δ sur cet espace tel que $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\delta\big)$ soit un espace métrique complet.

1 **1.2)** Donner la définition de l'espace vectoriel des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

1 **1.3)** Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

4 **1.4)** Soit φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, telle que $\varphi(0) = 1$, à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\varphi_n : x \mapsto \varphi(x_1 - n, x_2, \dots, x_d).$$

Vérifier que la suite de fonction $(\varphi_n)_n$ converge simplement et donner sa limite. La suite $(\varphi_n)_n$ converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$? Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$?

3 **1.5)** On considère le peigne de Dirac P, défini par

$$\langle P, \varphi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Montrer que P est une distribution tempérée, dont on donnera le support.

2,5 **1.6)** Donner un exemple d'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne se prolonge pas en une distribution tempérée.

Exercice 2. $\boxed{16,5}$

1 **2.1)** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ existe-t-il $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi' = \varphi$. On ne demande pas de démonstration.

2.2) Déduire de la question précédente toutes les solutions de l'équation

2,5 (D) $$T' = 0, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Date: Lundi 12 Octobre 2020.

2.3) On considère l'équation

1 (H) $$T'' + T = 0, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Rappeler l'ensemble Σ des solutions classiques de (H), c'est à dire les fonctions $T \in C^2(\mathbb{R})$ qui vérifient (H).

2.4) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (H) au sens des distributions. On considère les distributions

2 $$A = T' \cos + T \sin, \quad B = T' \sin - T \cos .$$

(ici $T' \cos$ désigne le produit de la distribution T' par la fonction cosinus, etc...). Montrer que A et B sont en fait des fonctions constantes. Calculer $A \sin - B \cos$. En déduire que toute solution de (H) au sens des distributions est en fait une solution classique.

2.5) Rappeler la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
2 On définira précisément la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ dans ces deux espaces.

2.6) Déterminer la transformée de Fourier de δ_1 et δ_{-1} (les impulsions de
2,5 Dirac en 1 et -1). En déduire les transformées de Fourier des fonctions cosinus et sinus.

2.7) Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation d'inconnue
2 U :
$$(x^2 - 1)U = 0, \quad U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

2.8) Soit Λ la distribution associée à la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.
2 Déterminer Λ' et Λ'' au sens des distributions. On justifiera rigoureusement l'utilisation de la formule des sauts.

2.9) Donner toutes les solutions de l'équation

1,5 (E) $$T'' + T = \delta_0 + \frac{|x|}{2}, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

$\boxed{13}$ **Exercice 3.** On désigne par (x, y) les coordonnées du point courant de $\mathbb{R}^2$. Soit V la distribution sur $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad < V, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(x, 0)dx.$$

1,5 **3.1)** Quel est le support de V ?

1,5 **3.2)** Calculer $\frac{\partial V}{\partial x}$ au sens des distributions.

$\boxed{10,5}$ **Exercice 4.** Soit f la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier.

2,5 **4.1)** Justifier que $\widehat{f}$ est une fonction continue et que $|\widehat{f}|^2$ est intégrable. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$ sans calculer $\widehat{f}$.

1,5 **4.2)** Calculer $\widehat{f}$.

2,5 **4.3)** Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $< E, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{e^{-|x|}}{x} \varphi(x)dx$. Montrer que la limite précédente existe, et que cela définit une distribution tempérée.

1 **4.4)** Calculer la distribution xE.

3 **4.5)** Déduire des questions précédentes la transformée de Fourier de la fonction arctan.

Intercalaire n° : 1 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 12/10/2020

Théorie des distributions Examen final
Correction

Exercice 1

1.1) Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note

$$q_N(\varphi) = \max_{\substack{|\alpha|\leq N \\ x \in \mathbb{R}^d}} (1+|x|)^N |\partial_x^\alpha \varphi(x)|$$

Par définition, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d);\ \forall N \geq 0,\ q_N(\varphi) < \infty\}$

On pose

$$\delta(\varphi,\psi) = \sum_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^N} \min(q_N(\varphi-\psi), 1)\ ;\ \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Alors δ est une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \delta)$ est un espace métrique complet

1.2) . $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires continues (au sens de la distance δ) sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

De manière équivalente, une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ quand il existe $N \geq 0$ et $C > 0$ tels que pour tout φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

(*) $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\, q_N(\varphi)$

Remarquons qu'un élément T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie

(*) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en une distribution tempérée.

1.3) $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ signifie:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

1.4) Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

Dès que $n \geq 1 + |x_1|$, on a $|x_1 - n| \geq 0$ et donc $\varphi_n(x) = 0$. La suite $(\varphi_n)_n$ converge donc simplement vers la fonction constante nulle.

$\varphi_n((n, 0, \dots, 0)) = \varphi(0) = 1$ donc $q_1(\varphi_n) \geq 1 + n$

$\delta(\varphi_n, 0) \geq 1$ pour tout n ce qui montre que $(\varphi_n)_n$ ne tend pas vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On identifie φ_n à la distribution tempérée.

$$\psi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \varphi_n(x)\, dx$$

Notons $\overline{B}_n$ la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre $(n, 0, \dots, 0)$ et de rayon 1. Le support de φ_n est inclus dans $\overline{B}_n$.

Donc, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int \varphi_n \psi \right| \leq \|\varphi\|_0 \sup_{x \in \overline{B}_n} |\psi(x)|$$

Intercalaire n° : 2 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 12/10/2020

$$\left|\int \varphi_n \psi\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \frac{1}{n-1} \sup_{x\in \bar{B}_n} (1+|x|)|\psi(x)| \quad ; \forall n\geq 2,$$

où on a utilisé que $|x|\geq n-1$ sur $\bar{B}_n$

on a donc $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n \psi = 0$ pour tout ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qui montre que la suite $(\varphi_n)_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

15) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(k)| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|k|)^2} (1+|k|)^2 |\varphi(k)|$$

$$\leq q_2(\varphi) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|k|)^2}}_{\text{fini (Riemann)}}$$

Ceci montre que $\langle P, \varphi\rangle$ est bien défini et que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; $|\langle P,\varphi\rangle| \leq C q_2(\varphi)$ $\quad C = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|k|)^2}$

P est donc une distribution tempérée.
Le support de P est $\mathbb{Z}$

16) On considère la distribution T associée à la fonction $x \mapsto e^x$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\quad \langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\,dx$

Si T se prolongeait en une distribution tempérée, on aurait en particulier, pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On fixe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, positive, à support compact et valant 1 sur $[-1,+1]$.

On vérifie facilement que la suite $(\varphi_n)_n$ définie par $\varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}}\varphi(x-n)$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \varphi_n(x)\,dx \geq \int_{n-1}^{n+1} e^x e^{-\sqrt{n}}\,dx \geq e^{n-1}e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ceci montre que T n'est pas une distribution tempérée.

Exercice 2

2.1) D'après le cours
$\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q $\varphi = \psi' \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$

Intercalaire n° : 3 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 12/10/2020

2.2) • Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ associée à une fonction constante.

Alors $T'=0$, donc (D) est vérifiée. On va montrer que les constantes sont les seules solutions de (D).

• Soit T une solution de (D). Alors

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi' \rangle = 0$

D'après la question précédente,

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$

On fixe $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x)\,dx = 1$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On pose $\tilde{\varphi} = \varphi - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right)\chi$

alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(x)\,dx = 0$. Donc $\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = 0$, ce qui implique $\langle T, \varphi \rangle = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right) \langle T, \chi \rangle$ par linéarité de T. On en déduit que T est la fonction constante égale à $\langle T, \chi \rangle$

2.3) $\Sigma = \{a \cos + b \sin \, ; (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$

qui s'écrit aussi

$\Sigma = \{x \longmapsto \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}, \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\}$

(les étudiants ne donnant que les solutions d'valeurs réelles, donc la première expression de Σ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ne seront pas sanctionnés).

2.4) Par la formule de dérivation du produit,

$$A' = T''\cos - T'\sin + T'\sin + T\cos$$
$$= (T''+T)\cos = 0,$$
donc par 2.2, A est constante

De même, $B' = (T''+T)\sin = 0$ et B est constante.

On a $T = A\sin - B\cos$, avec $(A,B) \in \mathbb{C}^2$.
Donc T est une solution classique.
On a montré que toute solution de (D) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution classique.

2.5) On note, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
$$\bar{\mathcal{F}}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$$
ce qui définit $\bar{\mathcal{F}}\varphi \in \mathcal{S}$,
et, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle \bar{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}\varphi\rangle,$$
ce qui définit $\bar{\mathcal{F}}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Intercalaire n° : 4 NOM, Prénom : DUYCKAERTS, T Date : 12/10/2020

La formule d'inversion de Fourier affirme :

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; $\overline{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\,\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$

$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$; $\overline{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}T = \mathcal{F}\,\overline{\mathcal{F}}T = T$,

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier

2.b) $\langle \hat{\delta}_1, \varphi \rangle = \langle \delta_1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix} \varphi(x)\,dx$

donc $\hat{\delta}_1$ est la fonction $x \mapsto e^{-ix}$. De même $\hat{\delta}_{-1}$ est la fonction $x \mapsto e^{ix}$

On en déduit : $\widehat{\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})} = \cos$

La formule d'inversion de Fourier implique (ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(T) = 2\pi \check{T}$, où $\check{T}$ est la distribution définie par

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$,

$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

On a donc $\mathcal{F}(\cos) = \frac{1}{2} \times (2\pi)(\check{\delta}_1 + \check{\delta}_{-1})$

$$\mathcal{F}(\cos) = \pi(\delta_1 + \delta_{-1})$$

De même, de $\frac{1}{2i}\widehat{\delta_{-1} - \delta_1} = \sin$, on déduit :

$$\frac{\pi}{i}(\check{\delta}_{-1} - \check{\delta}_1) = \mathcal{F}(\sin)$$

Soit $\mathcal{F}(\sin) = +i\pi(\delta_{-1} - \delta_1)$

2.7) Soit $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $(x^2-1)U=0$.
En prenant la transformation de Fourier de cette équation, on obtient :

$$\hat{U}'' + \hat{U} = 0.$$

Par la question 2.4, $\hat{U} = a\cos + b\sin$ pour des constantes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

En prenant la transformée de Fourier inverse et par la question précédente, on a déduit qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$U = \alpha\,\delta_1 + \beta\,\delta_{-1}$$

Réciproquement, si $U = \alpha\delta_1 + \beta\delta_{-1}$, on vérifie facilement que $(x^2-1)U=0$

L'ensemble des solutions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $(x^2-1)U=0$ est donc l'espace vectoriel engendré par δ_1 et δ_{-1}

2.8) Λ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de 0.
Sur $]0,+\infty[$, $\Lambda(x) = x$ donc $\Lambda'(x) = 1$
Sur $]-\infty,0[$, $\Lambda(x) = -x$ donc $\Lambda'(x) = -1$
Donc
$$\Lambda' = \mathbb{1}_{]0,+\infty[} - \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$$

Intercalaire n° : 5 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 12/10/2020

Λ' est une fonction constante sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et

$\lim\limits_{x\to 0^-} \Lambda'(x) = -1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \Lambda'(x) = 1.$

Donc $\Lambda'' = 2\delta_0$ par la formule des sauts.

2.9) $\left(\frac{1}{2}\Lambda''\right) + \frac{1}{2}\Lambda = \delta_0 + \frac{|x|}{2}$

ce qui montre que Λ est solution de (E).
T est une solution de (E), si et seulement si $\Lambda - T$ est solution de (H). Donc par (2.4), l'ensemble des de (E) est

$\left\{ \frac{1}{2}\Lambda + a\cos + b\sin,\ (a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$

Exercice 3

3.1) • Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est à support de $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})$ alors $\forall x\geq 0\ \varphi(x,0)=0$ et donc $\langle T,\varphi\rangle = 0$.

Donc $\operatorname{supp} T \subset [0,+\infty[\times\{0\}$.

• Soit maintenant $x\geq 0$. Fixons $\varepsilon>0$. Il existe une fonction positive, à support de la boule de centre $(x,0)$ et de rayon ε, $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $\varphi((x,0))>0$. Pour cette fonction, $\langle T,\varphi\rangle > 0$, ce qui montre que $(x,0) \in \operatorname{supp} T$.

Donc $\operatorname{supp} T = [0,+\infty[\times\{0\}$

3.2) $\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \varphi \rangle = - \langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,0)\,dx$$

$$= \varphi(0,0).$$

Donc $\frac{\partial v}{\partial x} = \delta_0$

Exercice 4

4.1) • $f \in L^1(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier est continue.

• $f \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et, par le théorème de Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

On $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$

$$= \left[- e^{-2x} \right]_0^{+\infty} = 1$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi.$

Intercalaire n° : 6 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 12/10/2020

4.2) $f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut donc utiliser la formule de la transformation de Fourier classique :

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} e^{x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(i\xi+1)x}}{-(i\xi+1)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-(i\xi-1)x}}{-(i\xi-1)} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{i\xi+1} + \frac{1}{1-i\xi}$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

4.3) On écrit, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx)dt = \varphi(0) + x\psi(x)$$

où ψ est une fonction de classe C^{∞}, bornée, telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| \leq q_1(\varphi)$

$$\cdot \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{-|x|}}{x} \varphi(x)dx = \underbrace{\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{-|x|}}{x} dx \, \varphi(0)}_{0 \text{ par imparité}} + \int_{|x|\geq\varepsilon} e^{-|x|} \psi(x)dx$$

donc

$$\langle E,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} e^{-|x|}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\varphi(x)\,dx$$

ce qui montre que $\langle E,\varphi\rangle$ est bien définie et

$$|\langle E,\varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx \leq 2\, q_1(\varphi)$$

Donc E est une distribution tempérée.

4.4) $$\langle xE,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} e^{-|x|}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\varphi(x)\,dx$$

donc $xE = f$

4.5) $xE = f$ donc $\widehat{xE} = \hat{f} = \dfrac{2}{1+\xi^2}$ par 4.2

On en déduit

$$i\frac{d}{d\xi}\hat{E} = \frac{2}{1+\xi^2} = 2\frac{d}{d\xi}\operatorname{Arctan}\xi$$

Intercalaire n° : 7 NOM, Prénom : DUYCKAERTS T. Date : 20/12/2020

On en déduit qu'il existe une constante c telle que:

$$\star \quad \frac{i}{2}\hat{E} = \operatorname{Arctan} + c$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, paire, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$

Alors $\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Arctan})\varphi = 0$ car Arctan est impaire,

et

$$\langle \hat{E}, \varphi \rangle = \langle E, \hat{\varphi} \rangle = 0$$

par la définition de E et puisque $\hat{\varphi}$ est aussi paire. On déduit de $\star$ que

$c \int \varphi = 0$ et donc que $c = 0$.

Finalement:

$$\frac{i}{2}\hat{E} = \operatorname{Arctan}$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{Arctan}) = \frac{i}{2}\mathcal{F}(\hat{E}) = i\pi \check{E} = -i\pi E.$$