d) $Mat_{\tilde{B},e}(f) \cdot Mat_{e,\tilde{B}}(f^{-1}) = I_n$.

(1) En particulier, $Mat_{\tilde{B},e}(f)$ est inversible (, d'inverse $Mat_{e,\tilde{B}}(f^{-1})$).

e) Puisque $\tilde{B}$ est de cardinal $3 = \dim \mathbb{C}^3$, il suffit de montrer que $\tilde{B}$ est libre. Or,

$$\lambda_1(0,1,i) + \lambda_2(0,i,1) + \lambda_3(1,1,1) = 0 \iff$$

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ i\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{rl} \lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ i\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{array}\right\} \underset{(L_2)\to(L_2)-i(L_1)}{\iff}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + (1-i)\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{(L_2)\to(L_2)-(1-i)(L_3) \\ (L_1)\to(L_1)-(L_3)}}{\iff} \left.\begin{array}{rl} \lambda_1 + i\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{array}\right\}$$

(1)

$$\underset{\substack{(L_1)\to(L_1)-\frac{i}{2}(L_2) \\ (L_2)\to\frac{1}{2}(L_2)}}{\iff} \left.\begin{array}{rl} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{array}\right\}.$$ Donc, $\tilde{B}$ est libre.

f) $$Mat_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -(3+i) & 1 & i \\ -(3-i) & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

$f(0,1,i) = (0,0,0)$,

$f(0,i,1) = (0,2i,2) = 2\cdot(0,i,1)$,

$f(1,1,1) = (-2, -(3+i)+1+i, -(3-i)-i+1) = (-2,-2,-2) = -2\cdot(1,1,1)$.

Donc,
$$Mat_{\tilde{B},\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$Mat_{\tilde{B},\tilde{B}}(f\circ f) = Mat_{\tilde{B},\tilde{B}}(f)\cdot Mat_{\tilde{B},\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



**Université Paris 13**

Institut Galilée

Nom : ..........................................

Prénom : ..........................................

N° de la carte étudiant : ..........................................

Note :

Formation : L1

Observations :

Date de l'Épreuve : 16/4/19

Épreuve de : Algèbre linéaire et Algorithmique

Corrigé

$\boxed{2\frac{1}{2}}$

Exercice 1: a) Toutes les composantes de $f$:

$x-y-z$

$y-z$

$-x+2z$

$2x-y-3z$

($\frac{1}{2}$)

sont linéaires en $x,y,z$. Donc, $f$ est linéaire.

b) $(x,y,z) \in \ker f \iff$

$$\left.\begin{array}{rl} x-y-z &= 0 \\ y-z &= 0 \\ -x+2z &= 0 \\ 2x-y-3z &= 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{(L_3)\to(L_3)+(L_1) \\ (L_4)\to(L_4)-2(L_1)}}{\iff} \left.\begin{array}{rl} x-y-z &= 0 \\ y-z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{(L_3)\to(L_3)+(L_2) \\ (L_4)\to(L_4)-(L_2)}}{\iff}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x-y-z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} x = y+z = 2z \\ y = z \end{array}\right\}.$$

Donc, $\ker f = \{(2z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Cet espace vectoriel est engendré par $(2,1,1)$ — un vecteur non nul. Donc, $\dim(\ker f) = 1$.

($\frac{1}{2}$)

c) D'après le Théorème du rang,

$\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$.

($\frac{1}{2}$)

d) Les deux vecteurs
$e_1 := f(1,0,0) = (1,0,-1,2)$ et
$e_2 := f(0,1,0) = (-1,1,0,-1)$
appartiennent à $\operatorname{Im} f$. Ils sont non-nul, et $e_2$ n'est pas un multiple scalaire de $e_1$. Ils ~~engendrent~~ constituent donc une famille libre dans $\operatorname{Im} f$. Or, d'après c),
$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f = 2.$$
1
Donc, $(e_1, e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

4

<u>Exercice 2:</u> a)

$$\left.\begin{array}{rl} a + 2b &= x \\ -a &= y \\ 3b &= z \end{array}\right\} \underset{\substack{(L_1)\to(L_2)\\(L_2)\to(L_1)}}{\overset{(L_2)\to(L_3)}{\Longleftrightarrow}} \left.\begin{array}{rl} -a &= y \\ 3b &= z \\ a + 2b &= x \end{array}\right\}$$

$$\underset{\substack{(L_1)\to\frac{1}{3}(L_1)\\(L_2)\to-(L_2)}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{rl} a &= -y \\ b &= \frac{1}{3}z \\ a + 2b &= x \end{array}\right\} \underset{(L_3)\to(L_3)-(L_1)-2(L_2)}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{rl} a &= -y \\ b &= \frac{1}{3}z \\ 0 &= x+y-\frac{2}{3}z \end{array}\right\}$$

Le dernier système est compatible si et seulement si
$$x + y - \frac{2}{3}z = 0. \iff 3x + 3y - 2z = 0.$$
Donc,
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 3y - 2z = 0\}.$$
1,5

b) $H$ est le noyau de l'application linéaire
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto 3x + 2y - z = 0.$$
Donc, $H$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
$f$ est surjective, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ (car $\operatorname{Im} f \neq 0$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$...), donc d'après le théorème du rang,
$$\dim H = \dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R} = 3 - 1 = 2.$$
(Autre: $H \subset \mathbb{R}^3$ est défini par une seule équation linéaire homogène. Donc, $\dim H = 3 - 1 = 2$.)
$e_1 := (1,-1,1)$ et $e_2 := (0,1,2)$ appartiennent à $H$. Ils sont non-nuls, et $e_2$ n'est pas un multiple de $e_1$.
1
Ils constituent donc une famille libre dans $H$. Or, $\dim H = 2$. Donc, $(e_1, e_2)$ est une base de $H$.

c) $G \cap H \underset{a)}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 3y - 2z = 0 \text{ et } 3x + 2y - z = 0\}$.

$$\left.\begin{array}{rl} 3x + 3y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 0 \end{array}\right\} \underset{(L_2)\to(L_2)-(L_1)}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{rl} 3x + 3y - 2z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{array}\right\}.$$

Donc,
$$G \cap H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 3y - 2z = 0 \text{ et } y = z\}$$
$$= \{(x,z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + z = 0\}.$$
$$= \{(-\tfrac{1}{3}z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}.$$
Cet espace vectoriel est engendré par $(-1,3,3)$ — un vecteur non nul. $((-1,3,3))$ est donc une base de $G \cap H$,
1
et $\dim(G \cap H) = 1$.

d) D'après le cours,
$$\dim(G+H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H) \underset{b),c)}{=} 2 + 2 - 1 = 3.$$
$G + H$ est donc un s.e.v. de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$. Donc,
0,5
$$G + H = \mathbb{R}^3.$$

7

<u>Exercice 3:</u> a) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
0,5
$$f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}).$$
b) $F = E$, $f$ est une application linéaire, et
0,5
$f$ est bijective.
c) La $j$-ème colonne $(C_j)$, $j = 1, \dots, n$, de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ s'obtient comme suit: $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$, et
$$f(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} \vec{v}_i,$$
avec des coefficients $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$ uniques (car $\mathcal{C}$ est une base de $F$). Alors,
$$(C_j) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \lambda_{2,j} \\ \vdots \\ \lambda_{m,j} \end{pmatrix}.$$
1

Intercalaire n° : ______ NOM, Prénom : ______ Date : 16/4/19

$3\frac{1}{2}$

Exercice 4 : a) $\det A = \det A^2 = (\det A)^2 \in \mathbb{K}$.

Donc, det A satisfait la relation

$x = x^2$ , ou $x^2 - x = x(x-1) = 0$.

1 Or, les seuls éléments de $\mathbb{K}$ avec $x(x-1)=0$ sont $x=0$ et $x=1$.

b) Si $\det A = 1$, alors A est inversible. Donc

1 $I_n = A \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} = A$.

c) Si $\det A = 0$, alors A n'est pas inversible.

D'après le cours (Thm. 3.21), l'équation

$$AX = 0 \quad , X \in M_{n,1}(\mathbb{K}),$$

0,5 admet donc au moins une solution $X \neq 0$.

d) Prendre

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$,

mais $A \neq 0_2$ et $A \neq I_2$.

5

**Faire cet exercice sur une feuille séparée et la rendre à part.**

Soit $M$ la matrice à coefficients positifs ci-dessous. Le coefficient en ligne $i$ et colonne $j$ est noté $M_{i,j}$. Un *chemin* est une suite de coefficients de $M$, chacun étant soit juste à droite soit juste en dessous du précédent. Le *poids* d'un chemin est la somme de ses coefficients. Par exemple, les coefficients d'un chemin de poids 33 sont ici soulignés :

$$M = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{6} & 7 & 5 \\ 5 & \underline{6} & 2 & 9 \\ 2 & \underline{7} & \underline{0} & \underline{9} \\ 6 & 0 & 6 & \underline{2} \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver un chemin de poids minimal allant de $M_{1,1}$ à $M_{4,4}$. Soit $Q_{i,j}$ le poids minimal d'un chemin allant de $M_{1,1}$ à $M_{i,j}$.

1. Quelle relation vérifient $Q_{i,j}$, $Q_{i-1,j}$ et $Q_{i,j-1}$ pour $i > 1$ et $j > 1$ ?
2. Calculer la matrice $4 \times 4$ de coefficient $Q_{i,j}$ en ligne $i$ et colonne $j$.
3. Quel est le poids minimal d'un chemin du premier au dernier coefficient ?
4. Trouver un chemin de poids minimal (le dessiner sur la matrice $M$).

**Correction.**

1. $Q_{i,j} = M_{i,j} + \min(Q_{i-1,j}, Q_{i,j-1})$.
2. On comprend l'intérêt de programmer :

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 16 & 21 \\ 8 & 14 & 16 & 25 \\ 10 & 17 & 16 & 25 \\ 16 & 16 & 22 & 24 \end{pmatrix}$$

3. C'est $Q_{4,4} = 24$.
4. Il faut partir de la position $(5,5)$ et remonter le chemin. Quand on est en position $(i,j)$, le coefficient précédent est en $(i-1,j)$ ou $(i,j-1)$, selon qui réalise le minimum dans la relation entre $Q_{i,j}$, $Q_{i-1,j}$ et $Q_{i,j-1}$. Il peut y avoir plusieurs choix. Ici il y en a deux :

$$M = \begin{pmatrix} \underline{3} & 6 & 7 & 5 \\ \underline{5} & \underline{6} & \underline{2} & 9 \\ 2 & 7 & \underline{0} & 9 \\ 6 & 0 & \underline{6} & \underline{2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} \underline{3} & 6 & 7 & 5 \\ \underline{5} & 6 & 2 & 9 \\ \underline{2} & 7 & 0 & 9 \\ \underline{6} & \underline{0} & \underline{6} & \underline{2} \end{pmatrix}$$