L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université
Paris 13

Examen partiel du 23 février 2012: correction

Exercice 1.

a) Lorsque $m = 0$, le système s'écrit:

$$(S_0) \qquad \begin{cases} 2x + y + 7z = 2 \\ 4x + 10z = 0 \\ 2x + 3y + 13z = 6. \end{cases}$$

Il a pour unique solution $(0, 2, 0)$. Voici un exemple de résolution par la méthode du pivot:

$$\begin{cases} 2x + y + 7z = 2 \\ -2y - 4z = -4 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ 2y + 6z = 4 & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 7z = 2 \\ -2y - 4z = -4 \\ 2z = 0 & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2). \end{cases}$$

En faisant $z = 0$ dans la deuxième équation, on obtient $y = 2$. En faisant $z = 0$ et $y = 2$ dans la première équation, on obtient bien $x = 0$.

b) On ne suppose plus $m = 0$. On résout le système

$$(S_m) \qquad \begin{cases} 2x + y + (7 + 4m)z = 2 + 2m \\ 4x + (10 + 7m)z = 4m \\ 2x + 3y + (13 + 6m)z = 6 + 2m \end{cases}$$

par la méthode du pivot.

$$\begin{cases} 2x + y + (7 + 4m)z = 2 + 2m \\ -2y - (4 + m)z = -4 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ 2y + (6 + 2m)z = 4 & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + (7 + 4m)z = 2 + 2m \\ -2y - (4 + m)z = -4 \\ (2 + m)z = 0 & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2). \end{cases}$$

On distingue ensuite deux cas, selon que le coefficient de z dans la troisième ligne est nul ou non.

<u>1er cas: $m = -2$.</u> La dernière ligne s'écrit $0 = 0$. Le système (S_{-2}) est donc équivalent (en divisant la deuxième ligne par -2) à:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2x - 2z = -4 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ y + z = 2 \end{cases}$$

En prenant x et y comme variables de base et z comme variable libre, on obtient que l'ensemble des solutions est:

$$\Big\{(-2 + z, 2 - z, z), \quad z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

<u>2ème cas: $m \neq -2$.</u> Le système est sous forme échelonnée, avec trois équations, trois inconnues, et aucun coefficient nul sur la diagonale: c'est un système de Cramer qui a une unique solution. Pour la calculer, on voit que la dernière ligne donne $z = 0$, la deuxième ligne s'écrit alors $-2y = -4$, i.e. $y = 2$. La dernière ligne s'écrit $2x = 2 + 2m - y = 2m$, donc $x = m$. Dans ce cas, $(m, 2, 0)$ est l'unique solution du système.

c) Les coefficients du système

$$(T_m) \qquad \begin{cases} 2x + y + (7+4m)z = 0 \\ 4x + (10+7m)z = 1 \\ 2x + 3y + (13+6m)z = -1. \end{cases}$$

et du système (S_m) sont les mêmes. Lorsque $m \neq -2$, (S_m) est un système de Cramer, donc (T_m) est également un système de Cramer, qui a une unique solution.

Lorsque $m = -2$, (S_m) n'est pas un système de Cramer: le système homogène associé a une infinité de solutions et (T_{-2}) a ou bien zéro, ou bien une infinité de solutions (la résolution du système montrerait que l'on est dans le deuxième cas, mais ce n'était pas demandé).

Exercice 2. La matrice A est une matrice 2×3, B est une matrice 3×1 et C est 1×2. Le produit de deux matrices est bien défini lorsque le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième. On en déduit que AB, BC et CA sont bien définis, et que BA, CB et AC ne sont pas définis.

En utilisant la définition du produit de deux matrices, on obtient:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad BC = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad CA = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.

a) Une matrice carrée 2×2, $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, son inverse est $\frac{1}{ad-bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$. Le déterminant de $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ vaut 2, elle est donc inversible, d'inverse:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3/2 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

Pour étudier l'inversibilité de B, on utilise la méthode du pivot:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (L_1) \to (L_2) \to (L_3) \to (L_1) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_1) \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (L_3) \leftarrow (L_3) + 3(L_2) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

La matrice de gauche est triangulaire supérieure et n'a pas de coefficient nul sur la diagonale: elle est donc inversible, ce qui montre que B est inversible. Pour calculer B^{-1}, passe à la phase de montée de la méthode du pivot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_1) \leftarrow (L_1) + 3(L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_3) \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 3 & -14 \\ -5 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2) \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (L_2) \leftarrow -(L_2) \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

L'inverse de B est donc:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Pour étudier l'inversibilité de la matrice C, on utilise également la méthode du pivot. On trouvera en fait que C n'est pas inversible: on omet donc la colonne de droite, qui ne sert qu'à calculer l'inverse lorsque la matrice est inversible.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + 3(L_1) \\ (L_4) \leftarrow (L_4) + 2(L_1) \end{matrix} \\
&\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (L_4) \leftarrow (L_4) - 2(L_2) \end{matrix}.
\end{aligned}$$

En faisant l'opération $(L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_4)$, on obtient une ligne de zéros. On a obtenu à partir de C, par des opérations élémentaires sur les lignes, une matrice non inversible. On en déduit que C n'est pas inversible.

b) Considérons les systèmes:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -2 \\ -x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

Ces systèmes sécrivent:

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soit (en utilisant l'inversibilité de B, montrée à la question précédente):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A l'aide de l'expression de B^{-1} trouvée à la question précédente, on obtient que l'unique solution du premier système est $(1, -3, -2)$, et l'unique solution du deuxième $(3, -16, -10)$.

Exercice 4.

a) Considérons:

$$\begin{gathered}
F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}, \quad F_2 = \{(a, a, a),\ a \in \mathbb{R}\} \\
F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xyz = 0\right\}, \quad F_4 = \{(0, 0, 0)\} \\
F_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x + y = 1 \text{ et } x + z = -1\right\}.
\end{gathered}$$

L'ensemble F_1 est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à trois inconnues. D'après le cours c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

L'élément neutre de $\mathbb{R}^3$, $\vec{0} = (0, 0, 0)$ est dans F_2. Soit $\vec{x} = (a, a, a)$ et $\vec{y} = (b, b, b)$ deux éléments de F_2, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\vec{x} + \vec{y} = (a + b, a + b, a + b) \text{ et } \lambda\vec{x} = (\lambda a, \lambda a, \lambda a)$$

sont bien dans F_2. Donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On pouvait également remarquer que $F_2 = \text{vect}\{1, 1, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'après le cours.

Soit $\vec{x} = (1,1,0)$, $\vec{y} = (0,0,1)$. Alors $\vec{x}, \vec{y} \in F_3$. Mais $\vec{x}+\vec{y} = (1,1,1) \notin F_3$. L'ensemble F_3 n'est pas stable par addition: ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

L'espace vectoriel $F_4 = \{(0,0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ par le cours.

On vérifie facilement que $(0,0,0) \notin F_5$, l'ensemble F_5 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$. Puique $\vec{x} \in F_2$, $\vec{x}$ s'écrit (a,a,a) pour un $a \in \mathbb{R}$. La condition $\vec{x} \in F_1$ impose

$$a + a + a = 3a = 0.$$

Donc $\vec{x} = (0,0,0)$. Réciproquement $(0,0,0)$ est bien un élément de $F_1 \cap F_2$. Finalement:

$$F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}.$$

c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x,y,z) - (a,a,a) = (x-a, y-a, z-a) \in F_1 &\iff (x-a)+(y-a)+(z-a) = 0 \\ &\iff 3a = x+y+z \iff a = \frac{x+y+z}{3}.\end{aligned}$$

d) On a bien sûr $F_1 + F_2 \subset \mathbb{R}^3$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $a = \frac{x+y+z}{3}$. D'après la question précédente:

$$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,z)-(a,a,a)}_{\in F_1} + \underbrace{(a,a,a)}_{\in F_2}.$$

Donc $(x,y,z) \in F_1 + F_2$. D'où $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$.

e) La somme $F_1 + F_2$ est directe car $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ (question b). Puisque $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ (question d) et cette somme est directe, les espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On note $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Soit

$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}, \quad F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } BM = MB\}.$$

a) On note 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $0A = A0 = 0$, donc $0 \in E$.

Si $M, N \in E$, alors

$$A(M+N) = AM + AN = MA + NA = (M+N)A,$$

donc $M + N \in E$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A,$$

et donc $\lambda M \in E$. On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le même raisonnement, en remplaçant A par B, montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Enfin l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Donc $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On a:

$$AM = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MA = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

La matrice M est dans E si et seulement si $AM = MA$, et donc si et seulement si $c = 0$ et $d = a$.

De même,

$$BM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}, \quad MB = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix},$$

et la matrice M est dans F si et seulement si $BM = MB$, et donc si et seulement si $b = 0$ et $d = a$.

Finalement

$$M \in E \cap F \iff \big(a = d \text{ et } c = b = 0\big).$$

c) On déduit de la question précédente que $E \cap F$ est l'ensemble des matrices de la forme $\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$, $a \in \mathbb{R}$. D'où

$$E \cap F = \mathrm{vect}(I_2),$$

où $I_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ est la matrice identité 2×2. .