# THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
# EXAMEN DE RATTRAPAGE
# CORRECTION

INSTITUT GALILÉE.
SUP GALILÉE, MACS 2, 2020-2021

Dans tout l'examen, $d$ est un entier naturel non nul, et $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ etc...) sont les mêmes que dans le cours.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et $K$ un compact de $\Omega$, on pose

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On admet l'inégalité suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$.

**Exercice 1.**

**1.1)** Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^\infty(\Omega)$, et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } C^\infty(\Omega).$$

**Réponse:**

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } C^\infty(\Omega)$$

si et seulement si pour tout compact $K$ de $\Omega$, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{m,K}(\varphi_n - \varphi) = 0.$$

**1.2)** On suppose maintenant que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

**Réponse:**

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } C^\infty(\Omega)$$

si et seulement il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset K$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{m,K}(\varphi_n - \varphi) = 0.$$

**1.3)** Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$. Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x$ de $K$, pour tout $n \geq 1$, $|\varphi_n'(x)| \leq \frac{C_1}{n^2}$. En déduire qu'il existe $C_0 > 0$ tel que tel que pour tout $x$ de $K$, pour tout $n \geq 1$, $|\varphi_n(x) - 1| \leq \frac{C}{n^2}$. Montrer enfin que pour tout entier $j \geq 2$, pour tout réel $x$, pour tout $n \geq 2$, $\left|\frac{d^j}{dx^j}\left(\varphi_n(x) - 1\right)\right| \leq \frac{1}{n^j}$.

**Réponse:** On note $M = \sup_{x\in K} |x|$. On a

$$|\varphi_n'(x)| = \frac{1}{n}\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{|x|}{n^2},$$

*Date*: Jeudi 21 Janvier 2021.

par l'inégalité rappelée au début de l'énoncé. Donc

$$\forall x \in K, \quad |\varphi_n'(x)| \leq \frac{M}{n^2}.$$

(en fait cette inégalité est vraie dès que $|x| \leq M$). De plus

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi_n'(t)dt = 1 + \int_0^x \varphi_n'(t)dt.$$

Donc par le point précédent,

$$|\varphi_n(x) - 1| \leq |x|\frac{M}{n^2} \leq \frac{M^2}{n^2}.$$

Enfin, si $j \geq 2$ et $n \geq 1$,

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}\left(\varphi_n(x) - 1\right)\right| = \frac{1}{n^j}\begin{cases} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| & \text{si } n \text{ est impair} \\ \left|\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right| & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement l'inégalité désirée.

**1.4)** Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend dans $C^\infty(\Omega)$ vers une limite $\varphi$ que l'on précisera.

**Réponse:** D'après la question précédente, pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}$, pour tout $m$,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{m,K}\left(\varphi_n - 1\right) \leq \frac{C}{n^2},$$

où $C = \max(C_0, C_1, 1)$. Cela démontre que la suite $(\varphi_n)_n$ tend vers la fonction constante égale à 1.

**1.5)** Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi_n = \varphi_n\psi$. Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers une limite que l'on précisera.

**Réponse:** On montre que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers la fonction $\psi$. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}\psi_n \subset \operatorname{supp}\psi.$$

Et par la formule de Leibniz,

$$\frac{d^j}{dx^j}\left(\psi_n - \psi\right) = \frac{d^j}{dx^j}\Big(\psi(\varphi_n - 1)\Big) = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{d^j\psi(x)}{dx^j}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\left(\varphi_n - 1\right).$$

On en déduit qu'il existe une constante $C_j$, telle que

$$p_{m,K}(\psi_n - \psi) \leq p_{m,K}(\psi)p_{m,K}(\varphi_n - 1)$$

et donc, par la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty} p_{m,K}(\psi_n - \psi) = 0.$$

Ceci montre

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

**Exercice 2.**

**2.1)** Soit $T$ une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Donner une définition de "$T$ est une distribution sur $\Omega$" qui utilise la notion de convergence vue en 1.2).

**Réponse:** La forme linéaire $T$ est une distribution sur $\Omega$ si est seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

**2.2)** Donner une définition équivalente de cette notion qui utilise la notation $p_{m,K}$ introduite au début de l'énoncé.

**Réponse:** La forme linéaire $T$ est une distribution sur $\Omega$ si est seulement si pour tout compact $K$ de $\Omega$,

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset K \Longrightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C\, p_{m,K}(\varphi).$$

**2.3)** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En d'autres termes, $f$ est la fonction indicatrice de $[0,1]^2$. Justifier que $f$ définit une distribution $T_f$ sur $\mathbb{R}^2$. On explicitera $\langle T_f, \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Comme dans le cours, on notera simplement $f$ la distribution $T_f$.

**Réponse:** La fonction $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Elle définit donc une définition $T_f$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle T_f, \varphi \rangle) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x_1, x_2)dx_1 dx_2.$$

**2.4)** Pour $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on note

$$\langle P_a, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x_1, a)dx_1.$$

Montrer que $P_a$ ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Donner (sans démonstration) le support de cette distribution. Quel est l'ordre de $P_a$ ?

**Réponse:** Par linéarité de l'intégrale, $P_a$ est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. De plus

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle P_a, \varphi \rangle| \leq \sup_{0 \leq x_1 \leq 1} |\varphi(x_1, a)|,$$

ce qui montre par le critère de la question 2.2 que $P_a$ est une distribution (d'ordre 0).

**2.5)** Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ au sens des distributions.

**Réponse:** Par définition de la dérivée au sens des distributions, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \rangle = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,(x_1, x_2)\, dx_2, dx_1 \\ = -\int_0^1 \left(\varphi(x_1, 1) - \varphi(x_1, 0)\right) dx_1.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = P_0 - P_1.$$

**2.6)** Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ au sens des distributions. On exprimera cette distribution en fonction de masses de Dirac.

**Réponse:** Par la question précédente et la définition de la dérivée au sens des distributions,

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi \rangle = -\langle P_0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle + \langle P_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle = -\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 0)dx_1 + \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 1)dx_1 \\ = -\varphi(1,0) + \varphi(0,0) + \varphi(1,1) - \varphi(0,1).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -\delta_{(1,0)} + \delta_{(0,0)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(0,1)}.$$

**Exercice 3.**

**3.1)** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}, x \neq 0.$$

Rappeler la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $\varphi$, entre $x \in \mathbb{R}$ et 0, puis montrer que $\widetilde{\varphi}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|.$$

**Réponse:** La formule de Taylor demandée est

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx)dt.$$

On a donc, pour $x \neq 0$.

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt.$$

Le membre de droite a également un sens lorsque $x = 0$ (il vaut alors $\varphi'(0)$. Comme $(t, x) \mapsto \varphi'(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit par le formule de continuité sous le signe intégral que la formule précédente définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'inégalité demandée découle également immédiatement de cette formule.

**3.2)** Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle A, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + (\log \varepsilon)\varphi(0).$$

Montrer que $A$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.

**Réponse:** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $R > 0$ tel que $x \leq R$ sur le support de $\varphi$. Alors

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_\varepsilon^R \widetilde{\varphi}(x)dx + \varphi(0)\int_\varepsilon^R \frac{dx}{x}.$$

On a donc

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \varphi(0)\log\varepsilon = \int_0^R \widetilde{\varphi}(x)dx + (\log R)\varphi(0).$$

Puisque $\widetilde{\varphi}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par la question précédente, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \varphi(0)\log\varepsilon = \int_0^R \widetilde{\varphi}(x)dx + (\log R)\varphi(0).$$

Donc $\langle A, \varphi\rangle$ est bien définie. Par linéarité de la limite et de l'intégrale, on voit que $A$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Enfin, en notant $K$ un compact qui contient $\operatorname{supp}\varphi$, et en choisissant $R$ tel que $K \subset (-\infty, R]$, on obtient, en utilisant l'estimation sur $\widetilde{\varphi}$ de la question précédente,

$$\langle A, \varphi\rangle \leq (R + \log R)p_{1,K}(\varphi),$$

ce qui montre que $A$ est une distribution (d'ordre au plus 1).

**3.3)** Soit $G(x) = \begin{cases} \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ Calculer la dérivée de $G$ au sens des distributions.

**Réponse:** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\langle G', \varphi\rangle &= -\int_0^{+\infty} (\log x)\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\infty (\log(x))\varphi'(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + (\log\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\right) \text{ (intégration par parties)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + (\log\varepsilon)\varphi(0)\right),\end{aligned}$$

où on a utilisé que puisque $\varphi$ est dérivable, $\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. On a montré que $G' = A$ au sens des distributions.

**Exercice 4.**

**4.1)** Donner la définition de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

**Réponse:** Par définition, la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

La transformée de Fourier $\widehat{T}$ d'une distribution tempérée $T$ est définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle\widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle.$$

**4.2)** Calculer la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1. On pourra noter simplement 1 cette fonction.

**Réponse:** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle\,\widehat{1}, \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)dx = 2\pi\varphi(0),$$

où la dernière égalité découle de la formule d'inversion de Fourier. On a montré

$$\widehat{1} = 2\pi\delta_0.$$

**4.3)** Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = e^{-|x|/n}$. Montrer

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

**Réponse:** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle g_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|/n}\varphi(x)dx.$$

De plus $\left|e^{-|x|/n}\varphi(x)\right| \le |\varphi(x)|$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante de $n$. Enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} e^{-|x|/n}\varphi(x) = \varphi(x).$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|/n}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx,$$

ce qui montre que la suite $g_n$ converge vers 1 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

**4.4)** Calculer la transformée de Fourier $\widehat{g_n}$ de $g_n$.

**Réponse:** $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On peut donc utiliser la formule intégrale

$$\widehat{g}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi}e^{x/n}dx + \int_0^\infty e^{-ix\xi}e^{-x/n}dx.$$

D'où

$$\widehat{g}_n(\xi) = \frac{1}{1/n - i\xi} + \frac{1}{1/n + i\xi}.$$

**4.5)** Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(x) = \frac{1}{ix + 1/n} + \frac{1}{-ix + 1/n}.$$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

**Réponse:** Par la question 4.4, $\widehat{g}_n(x) = h_n(x)$. Par la question 1.2

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

La transformation de Fourier étant une application continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n = \widehat{1} = 2\pi\delta_0,$$

où la dernière égalité a été montrée à la question 4.2. Finalement,

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 2\pi\delta_0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

**4.6)** Calculer $g_n'$ au sens des distributions.

**Réponse:**

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x/n} & \text{si } x > 0 \\ e^{x/n} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

C'est une fonction continue, $C^1$ par morceaux. La formule des sauts donne

$$g_n'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n}e^{-x/n} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{n}e^{x/n} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarquons que la fonction $g_n$ étant continue au point 0, il n'y a pas de masse de Dirac dans l'expression de la dérivée.

**4.7)** Déterminer $\lim_{n\to\infty} ng_n'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

**Réponse:**

$$ng_n'(x) = \begin{cases} -e^{-x/n} & \text{si } x > 0 \\ e^{x/n} & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$

Par le même raisonnement que dans la question 4.3, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} ng_n' = -2H + 1 = \begin{cases} -1 & \text{sur } ]0,\infty[ \\ 1 & \text{sur } ]-\infty,0[, \end{cases}$$

où $H = \mathbb{1}_{]0,\infty[}$ est la fonction plateau de Heaviside.

**4.8)** Déterminer $\widehat{g_n'}$. On pourra utiliser la question 4.4).

**Réponse:** Par la question 4.4,

$$\widehat{g_n'}(\xi) = i\xi\widehat{g}_n(\xi) = \frac{2i\xi}{1/n + n\xi^2}.$$

**4.9) Difficile !** Calculer $\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n'}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On exprimera cette limite à l'aide d'une distribution vue dans le cours. En déduire la transformation de Fourier de la fonction de Heaviside.

**Réponse:** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité $A^2 + B^2 \geq 2AB$, on obtient $1/n + n\xi^2 \geq 2|\xi|$ et donc $\left|\widehat{g_n'}(\xi)\varphi(\xi)\right| \leq |\varphi(\xi)|$, qui est une fonction intégrable indépendante de $n$. Puisqu'on a de plus la convergence ponctuelle

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n'}(\xi)\varphi(\xi) = 0,$$

on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g'_n} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Il y avait en fait une faute de frappe dans l'énoncé. La question difficile est le calcul de

$$\lim_{n\to\infty} n\widehat{g'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2i\xi}{1/n^2+\xi^2}.$$

On peut montrer que cette limite était égale à $2i$ fois la valeur principale de $1/\xi$. On en déduit , par la question 4.7,

$$-2\widehat{H} + \widehat{1} = 2i\mathrm{vp}(1/\xi)$$

et donc, par la question 4.2,

$$\widehat{H} = -i\mathrm{vp}(1/\xi) + \pi\delta_0.$$

On retrouve le résultat du cours, obtenu par une méthode différente.