Correction de l'examen du 14/06/2012

Exercice 1

a) (i) $\det M_a = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & 2a & a \\ 3a & 0 & -a \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$= a^3 \left(-2 + 3 + 1 \right) = 2a^3$$

(par la formule de Sarrus)

(ii) Si $a \neq 0$, $\det M_a \neq 0$ donc M_a est inversible et $\operatorname{rg} M_a = 3$

Si $a = 0$, $M_a = 0$ et $\operatorname{rg} M_a = 0$

b) $\det N_b = \det \begin{bmatrix} b & b & 2 & 0 \\ 1 & b & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 & 2 & 0 \\ 1 & b-1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (C_2) \leftarrow (C_2) - (C_1)$, $(C_3) \leftarrow (C_3) - 3(C_4)$

$$= (b-1) \begin{vmatrix} b & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la 2ème colonne

En utilisant à nouveau la formule de Sarrus pour calculer les deux déterminants 3×3, on obtient :

$$\det N_b = (b-1)(3b-4-4)+2 = 3b^2-11b+10$$

(ii) Le discriminant du trinôme du second degré précédent est : $\Delta = 11^2 - 4\times 10\times 3 = 1$

Les deux racines sont donc $\frac{11\pm\sqrt{1}}{6} = 2$ et $\frac{5}{3}$

. Si $b \notin \{2, \frac{5}{3}\}$ $\det N_b \neq 0$ et $\operatorname{rg} N_b = 4$

. $N_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ du même rang que :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{1}{2}(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1) \\ (L_4) \leftarrow (L_4) - (L_1) \end{matrix}$$

C'est une matrice de rang 3 (les lignes 1, 2 et 4 sont libres). Donc $\operatorname{rg} N_2 = 3$

. $N_{\frac{5}{3}} = \begin{bmatrix} 5/3 & 5/3 & 2 & 0 \\ 1 & 5/3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ qui est du même rang que les matrices suivantes, obtenues par transformations élémentaires :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 2/3 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) - \frac{5}{6}(L_4) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{1}{2}(L_4) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_4) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (L_2) \leftarrow (L_2) + \frac{2}{3}(L_3)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_4) \\ (L_2) \leftarrow (L_3) \\ (L_3) \leftarrow (L_1) \\ (L_4) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{array}$$

c'est une matrice échelonnée de rang 3. D'où $\operatorname{rg} N_{\frac{5}{3}} = 3$

Exercice 2

a) Par le théorème du rang,

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f$$

b) (i) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (L_1) \\ 10x + 5y + 5z = 0 & (L_2) \\ -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On remarque que $5(L_1) = (L_2)$ et $-\frac{1}{2}(L_1) = (L_3)$

donc $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow 2x + y + z = 0$

En particulier, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 2

En choisissant y et z comme variables libres, on obtient une base de $\operatorname{Ker} f$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) Par le a), $3 = 2 + rg(f)$. $rg(f) = 1$

(iii) . $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

. $\dim \operatorname{Im} f = 1 < 3$ donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

. f n'est pas bijective.

c) (i) $h(x, y) = (2x + y ; 2x - y ; 2x + 3y)$

(ii) $(x, y) \in \operatorname{Ker} h \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

En additionnant les deux premières lignes, on obtient $2x = 0$, donc $x = 0$, ce dont on déduit immédiatement $y = 0$.

Donc $\operatorname{Ker} h = \{0\}$

(iii) $rg\, h = 2 - \dim \operatorname{Ker}(h) = 2$

(iv) $\operatorname{Ker} h = \{0\}$ donc h est injective

$\dim(\operatorname{Im} h) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ donc h n'est pas surjective.

. h n'est pas bijective

Exercice 3

a) $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

b) (i) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(1,1,3) + \mu(2,0,4) = 0$$

alors $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ 3\lambda + 4\mu = 0 \end{cases}$

d'où $\lambda = \mu = 0$.

La famille $\{(1,1,3); (2,0,4)\}$ est libre.

C'est aussi, par définition, une famille génératrice de F. C'est donc une base de F.

En particulier, $\dim F = 2$.

(ii) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Par définition de F, $(x,y,z) \in F$ si et seulement si le système $\lambda(1,1,3) + \mu(2,0,4) = (x,y,z)$, d'inconnues λ, μ, a au moins une solution.

On met ce système sous forme échelonnée:

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ \lambda = y \\ 3\lambda + 4\mu = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -2\mu = y - x & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ -2\mu = z - 3x & (L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -2\mu = y - x \\ 0 = z - y - 2x & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_2) \end{cases}$$

Ce système a une solution (λ, μ) si et seulement si $z - y - 2x = 0$.

Donc $(x, y, z) \in F \iff 2x + y - z = 0$

c) (i) $(1,2,4) \neq \vec{0}$ Donc $\dim G = 1$ et $\{(1,2,4)\}$ est une base de G.

(ii) $(1,2,4)$ vérifie l'équation $2x + y - z = 0$

Donc $G \subset F$. On en déduit $G \cap F = G$, qui est de dimension 1 et a pour base $\{(1,2,4)\}$

(iii) $F + G = F$ car $G \subset F$. Donc $\dim(F+G) = 2$

(iv) $F \cap G \neq \{0\}$. La somme $F+G$ n'est donc pas directe, et les espaces F et G ne sont pas supplémentaires.

d) (i) On prend x comme variable de base, y et z comme variables libres dans l'équation $x + z = 0$

On obtient une base $\{(0,1,0); (-1,0,1)\}$ de H.

(ii) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in G \cap H \iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q } (x,y,z) = \lambda(1,2,4) \\ \text{et} \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q } (x,y,z) = \lambda(1,2,4) \text{ et } \lambda + 4\lambda = 0$$

$$\iff (x,y,z) = (0,0,0)$$

$G \cap H = \{0\}$; $\dim G \cap H = 0$; une base de $G \cap H$ est donnée par l'ensemble vide.

(iii) $\dim(G+H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H)$
$= 2 + 1 - 0$
$= 3$

(iv) . $G \cap H = \{0\}$. La somme $G+H$ est donc directe

. $\dim(G+H) = 3$ et $G+H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc $G+H = \mathbb{R}^3$.

Les espaces G et H sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Exercice 4 a) On utilise la formule du produit ligne-colonne

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A^3 = 0$$

$A . A^2 = 0$ avec $A^2 \neq 0$. Donc A n'est pas inversible

c) (i) $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3 + A + A^2 - A - A^2 - A^3$
$= I_3 - A^3 = I_3$ car $A^3 = 0$

(ii) Par (i), $I_3 - A$ est inversible, d'inverse $I_3 + A + A^2$.

Exercice 5

a) On utilise la méthode du pivot.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -8 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (L_1) \leftrightarrow (L_3)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right] \quad (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2)$$

La matrice de gauche, obtenue à partir de P par des opérations élémentaires, est triangulaire supérieure et n'a pas de zéros sur sa diagonale. Elle est donc inversible, ce qui montre que P est inversible. Pour calculer P^{-1}, on continue la méthode du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & -4 & -13 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) + (L_3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right] \quad (L_1) \leftarrow (L_1) - 2(L_2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_2) \leftarrow -(L_2) \\ (L_3) \leftarrow -(L_3) \end{array}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

b) . P est inversible. La famille des vecteurs colonnes de P est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = P$$

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

c) (i) $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -18 & -27 \\ 0 & 11 & 18 \\ 0 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\
(\mathbb{R}^3, \tilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}"] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}}(f)"'] & (\mathbb{R}^3, \tilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$$

$$= P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\,P$$

(formule de changement de base)

(iii) $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -18 & -27 \\ 0 & 11 & 18 \\ 0 & -6 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(iv) La matrice de f dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est diagonale. $\tilde{\mathcal{B}}$ est donc formée de vecteurs propres de f. Plus précisément, 2 est une valeur propre simple de f, correspondant au vecteur propre $(3,-2,1)$.

-1 est une valeur propre double de f, une famille libre de 2 vecteurs propres correspondant à -1 étant $\{(-8,3,-2);\ (7,-3,2)\}$