NOM: **Prénom:**

CP2I2. MATHÉMATIQUES. CONTRÔLE CONTINU DU 27/01/2022

Questions de cours. Soit E un espace vectoriel.

- Donner la définition d'une forme bilinéaire φ sur E.

Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ telle que:

1,5 $\forall x \in E;\quad y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

$\forall y \in E;\quad x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

- On suppose E de dimension finie, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. donner la définition de la matrice de la forme bilinéaire φ dans $\mathcal{B}$.

1 C'est la matrice $[\varphi(e_i, e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$

Exercice. On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(1) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire une balle orthogonale (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ à partir de la base (v_1, v_2, v_3).

0,5 On pose $e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche e_2 de la forme $e_2 = v_2 + \alpha e_1$

La condition $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$ donne

1 $\alpha = -\dfrac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} = -\dfrac{3}{3} = -1$ Donc

$e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

On cherche e_3 de la forme $e_3 = v_3 + \beta e_1 + \gamma e_2$ avec

$\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ i.e $\quad \beta = -\dfrac{\langle v_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} = -\dfrac{3}{3} = -1$

$\langle e_3, e_2 \rangle = 0$ i.e $\quad \gamma = \dfrac{-\langle v_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} = \dfrac{14}{14} = 1$

1,5 $\quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) En déduire une base orthonormale de $F = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$.

Une base orthonormale de F est donnée par

1 $\quad \left(\dfrac{1}{\|e_1\|} e_1, \dfrac{1}{\|e_2\|} e_2\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

(3) Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur F.

Cette projection est donnée par

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; u \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, u \right\rangle \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1,5 $\quad = \dfrac{1}{3} \times 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{14} \times 14 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

NOM: **Prénom:**

CP2I2. MATHÉMATIQUES. CONTRÔLE CONTINU DU 27/01/2022

Questions de cours. Soit V un espace vectoriel.

- Donner la définition d'une forme bilinéaire φ sur V.

Une forme bilinéaire sur V est une application $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que

1,5

$\forall x \in V ; \ y \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

$\forall y \in V ; \ x \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

- On suppose V de dimension finie, et on note $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. donner la définition de la matrice de la forme bilinéaire φ dans $\mathcal{B}$.

1 φ est la matrice $[\varphi(v_i, v_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$

Exercice. On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire une balle orthogonale (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ à partir de la base (v_1, v_2, v_3).

0,5 On pose $e_1 = v_1$

On cherche $e_2 = v_2 + \alpha v_1$, orthogonal à $e_1 = v_1$

i.e $0 = \langle v_2, v_1 \rangle + \alpha \|v_1\|^2$ $\alpha = -\dfrac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = \dfrac{3}{3} = 1$

1 $e_2 = v_2 + v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2

On cherche e_3 de la forme $e_3 = v_3 + \beta e_1 + \gamma e_2$.

La condition $\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ donne $\beta = -\frac{\langle v_3, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = -\frac{3}{3} = -1$

1,5

La condition $\langle e_3, e_2 \rangle = 0$ s'écrit $\gamma = -\frac{\langle v_3, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = -\frac{14}{14} = -1$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) En déduire une base orthonormale de $F = \text{vect}\,(v_1, v_2)$.

$\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}\right)$ est une base orthonormale de F.

1

On calcule $\|e_1\| = \sqrt{3}$; $\|e_2\| = \sqrt{14}$ et donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de F.

(3) Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ sur F.

D'après le cours, cette projection orthogonale est donnée par

1,5

$$p_F(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle u, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{14}}\left\langle u, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \times (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \times (-14) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$