

Analyse harmonique appliquée
M1 Institut Galilée
Université Sorbonne Paris Nord
Année 2021-2022

Thomas Duyckaerts et Vuk Milisic

Contents

| | |
|--|----|
| Introduction | 5 |
| 1. Signal | 5 |
| 2. Systèmes de transmission | 6 |
| Chapitre 1. Transformation de Fourier discrète. Transformation de Fourier rapide | 9 |
| 1. Rappels rapides sur les séries de Fourier | 9 |
| 2. Transformation de Fourier discrète | 10 |
| 3. Transformation de Fourier rapide | 14 |
| 4. Application aux calculs approchés des coefficients d'une fonction périodique | 15 |
| Chapitre 2. Spectre continu et échantillonnage. Théorème de Shannon | 17 |
| 1. Transformation de Fourier des distributions tempérées | 17 |
| 2. Spectre, séries de Fourier et transformation de Fourier | 20 |
| 3. Formule de Poisson et échantillonnage | 22 |
| 4. Formule d'échantillonnage | 24 |
| Chapitre 3. Filtres analogiques | 27 |
| 1. Définitions et exemples | 27 |
| 2. Filtre et convolution, réponse impulsionnelle | 28 |
| 3. Propriétés des filtres | 32 |
| 4. Filtres passe-bas | 33 |
| 5. Filtres différentiels | 35 |
| 6. Appendice: compléments de preuves | 42 |
| Chapitre 4. Filtres discrets | 45 |
| 1. Définitions. Réponse impulsionnelle | 45 |
| 2. Propriété des filtres de convolution | 48 |
| 3. Réponse en fréquence, transformée en z | 50 |
| Chapitre 5. Transformation de Fourier à fenêtre glissante | 53 |
| 1. Introduction | 53 |
| 2. Définition | 53 |
| 3. Conservation de l'énergie. Formule de recouvrement | 54 |
| 4. Fenêtres usuelles | 55 |
| Appendice A. Notations | 59 |

Introduction

Le but de ce cours est de donner des applications de la théorie de Fourier vue dans le tronc commun du cours d'analyse harmonique, en insistant sur les applications au traitement du signal. La référence principale pour ce cours est le livre de C. Gasquet et P. Witomski¹. On commence par donner quelques notions de base de traitement du signal.

1. Signal

Un *signal* est une quantité dépendant d'une ou plusieurs variables physiques (temps, position, fréquence), par exemple:

- l'intensité d'un courant électrique ou la différence de potentiel entre deux points d'un circuit électrique;
- la position d'un objet;
- le volume d'un son;
(ces trois premiers signaux dépendant du temps)
- les niveaux de gris, ou de chaque couleur (Rouge Vert Bleu) d'une image (dépendant des coordonnées du point observé);
- le nombre de cas d'une épidémie, les fluctuations de valeurs boursières, de températures, dépendant du temps et/ou de l'espace etc...

Le but de la théorie du traitement du signal est de trouver des algorithmes permettant de compresser, d'archiver, de transmettre, d'analyser ces signaux. Les applications sont multiples (électronique, télécommunications, imagerie médicale, épidémiologie, mathématiques financières).

On dit que le signal est *analogique* quand la variable de départ est continue (par exemple dans \mathbb{R} ou plus généralement dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$), et qu'il est *discret* quand cette variable est discrète, principalement dans \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^d ou un ensemble fini.

La transformation d'un signal analogique en signal discret, nécessaire pour pouvoir stocker les signaux informatiquement, est appelée *échantillonnage* ou *discrétisation*. Un des objectifs principaux de ce cours sera de comprendre, en utilisant l'analyse harmonique, comment l'échantillonnage affecte les propriétés du signal.

Un signal peut être à valeurs discrètes ou continues. En pratique, on doit utiliser des valeurs discrètes pour stocker les signaux informatiquement. Une manière de le faire est de considérer des signaux *quantifiés*, c'est à dire multiples d'une certaine valeur $q > 0$. Nous n'aborderons pas cet aspect ici et considérerons seulement des signaux à valeurs continues.

Un signal peut être à valeurs scalaires (l'intensité d'un courant électrique, le volume d'un son par exemple), ou vectorielles (la position d'un objet). Dans ce

¹Claude Gasquet and Patrick Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Sciences Sup. Dunod, 2004.

cours, nous considérerons seulement des signaux à valeurs scalaires, c'est à dire réelles ou complexes.

Pour résumer, dans ce cours, un signal analogique sera une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , ou plus généralement une distribution tempérée sur \mathbb{R} . Un signal discret sera généralement une suite complexe, i.e. un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. La variable, continue ou discrète dont dépend le signal sera considéré comme un temps.

Trois exemples de signaux élémentaires. Nous noterons $u(t)$ l'échelon unité de Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La valeur en $t = 0$ n'ayant pas d'importance.

Un autre signal important est la *masse* ou *mesure* de Dirac δ_a , distribution tempérée modélisant une impulsion en $t = a$. Rappelons que $u'(t) = \delta_0$ et que δ_0 est limite, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, de toute suite de fonctions L^1 positives u_n telles que $\text{supp } u_n \subset [-1/n, 1/n]$ et $\int u_n = 1$.

Un *signal sinusoïdal pur*, ou *monochromatique* est donné par

$$x(t) = \alpha \cos(2\pi\lambda t + \varphi),$$

dans le cas réel et

$$z(t) = \alpha e^{i(2\pi\lambda t + \varphi)},$$

dans le cas complexe. L'*amplitude* du signal est $\alpha > 0$, sa *fréquence* est λ et son déphasage est φ . La *période* du signal est $T = 1/\lambda$ et sa *pulsation* $\omega = 2\pi\lambda$.

Par la théorie de Fourier, tout signal (considéré comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) se décompose en une intégrale (ou une somme, si le signal est périodique) de signaux monochromatiques. Les signaux sinusoïdaux joueront donc un rôle prépondérant dans ce cours. On appellera *spectre* d'un signal continu la donnée de ses coefficients de Fourier (lorsque le signal est périodique) ou de sa transformée de Fourier. On donnera également une définition du spectre d'un signal discret.

Exemple des sons. Si le signal $x(t)$ représente un son, un signal périodique de période T est une note, qui dépend de la fréquence $\lambda = 1/T$. Le "la" situé juste au dessus du sol sur la clé de sol est considéré comme note de référence, à 440 Hz. Une multiplication par 2 de la fréquence permet d'augmenter d'une octave (donc 880 Hz donne un "la" plus aigu). Une multiplication par 3/2 d'une quinte (ainsi 660 donne un "mi"). La forme du signal détermine le timbre: la même note produite par deux instruments de musique différents donnera deux signaux différents, mais de même périodes (donc de même fréquence).

2. Systèmes de transmission

Un *système de transmission* (en abrégé *système*), est un appareil qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$. Cela peut-être par exemple un circuit électrique ou mécanique, un programme informatique permettant d'ôter le bruit d'un son ou d'un image...

En théorie du signal, on ne s'intéresse pas à la façon dont marche l'appareil, mais à son effet, c'est à dire à la transformation du signal d'entrée en signal de sortie. Mathématiquement le système est modélisé par un opérateur $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, où \mathcal{X} est l'ensemble des signaux d'entrées et \mathcal{Y} l'ensemble des signaux de sortie. Quand les signaux d'entrée et de sortie sont analogiques, on parle de *système analogique*,

quand ils sont discrets, on parle de *système discret*. Lorsque les deux signaux sont de natures différentes, on parle de *convertisseur* (analogique-discret ou discret-analogique).

Un exemple simple de système est celui qui à un signal continu x associe le signal

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds,$$

où $T > 0$ est fixé. Ce système est appelé *filtre à moyenne glissante*. Son analogue discret est le système qui à $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ associe

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^k x_j,$$

où $N \geq 2$ est un nombre entier arbitraire. Ces filtres permettent de lisser un signal ayant des irrégularités locales. La moyenne hebdomadaire ($N = 7$ et x_k représente la valeur d'une certaine quantité au jour k) est par exemple très utilisée pour le suivi des chiffres d'épidémies.

L'*échantillonnage* d'un signal continu, mentionné plus haut, peut être modélisé par un convertisseur analogique/discret qui à $x(t)$ associe $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (ou $\{x(kT)\}_{k \in J}$, où J est un sous-ensemble fini de \mathbb{N}), appelé *échantillonneur*. Ici T est un réel strictement positif. L'étude de l'échantillonnage, et en particulier la reconstruction du signal de départ à partir du signal échantillonné, est l'objet du chapitre 2. Le chapitre 1 concerne un analogue discret de la transformation de Fourier et un algorithme de calcul de cette transformation, appelée *transformée de Fourier rapide*. Ces deux notions sont aussi très liées à l'échantillonnage des signaux.

Nous étudierons ensuite une certaine catégorie de systèmes de transmission linéaires appelés *filtres*. Le chapitre 3 traite les filtres analogiques et le chapitre 4 les filtres discrets. La définition exacte des filtres sera données dans ces deux chapitres.

Transformation de Fourier discrète. Transformation de Fourier rapide

1. Rappels rapides sur les séries de Fourier

Pour $p \in [1, \infty)$, on note L_T^p l'espace des (classes de) fonctions T périodiques mesurables sur \mathbb{R} , telles que $|f|^p$ est intégrable sur $[0, T]$, muni de la norme:

$$\|f\|_{L_T^p} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

L'espace L_T^p s'identifie à l'espace $L^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

A toute fonction $f \in L_T^1$, on associe des coefficients de Fourier:

$$(1) \quad c_n(f) = c_n(f, T) = \hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\pi nt/T} f(t) dt.$$

On rappelle que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$$

et que si de plus $f \in L_T^2$, on a

$$(2) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nt/T},$$

où l'égalité a lieu dans L_T^2 , ce qui signifie exactement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left| \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}} - f(t) \right|^2 dt = 0.$$

On a de plus l'égalité de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

La formule (2) est appelée *développement en séries de Fourier* de f . Avec des hypothèses supplémentaires sur f , la convergence de la série a lieu pour tout t . C'est par exemple le cas lorsque f est continue, C^1 par morceaux (théorème de Dirichlet).

AVERTISSEMENT 1.1. Dans le tronc commun d'analyse harmonique, les coefficients de Fourier étaient notés \hat{f}_n plutôt que $c_n(f)$. Les deux notations sont utilisées dans la littérature. Par ailleurs, dans la plus grande partie de ce tronc commun, la période T a été fixée à 2π , ce qui simplifie les formules et le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est généralement noté \mathbb{T}^1 . Il est important ici de ne pas se restreindre à une seule valeur de T , et le lecteur prendra bien soin au paramètre T dans la définition de

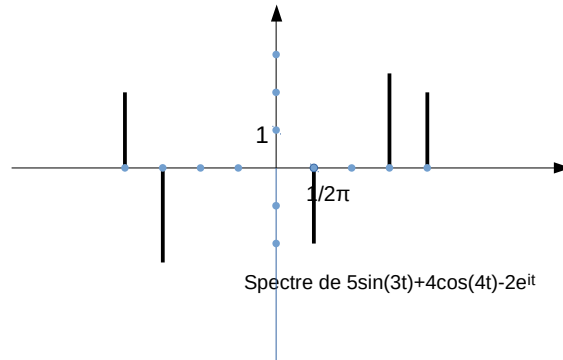
$c_n(f)$ (qui dépend donc aussi de T , dépendance que nous n'indiquerons pas en général pour ne pas alourdir les notations). Les formules générales se déduisent aisément du cas $T = 2\pi$ par un changement d'échelle.

2. Transformation de Fourier discrète

En plus du livre de Gasquet et Witomski (cf référence p. 5), nous conseillons l'excellente introduction à l'analyse de Fourier de Stein et Shakarchi (en anglais)¹. Le chapitre 7 traite la transformée de Fourier discrète.

2.1. Motivation. Soit f une fonction continue, périodique de période $T > 0$, et $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier, définis par (1). Le *spectre* (ou *spectre énergie-fréquence*) de f est par définition l'ensemble $(n/T, c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ (cf Figure 1). Il est donc donné, la période T étant connue, par la suite des coefficients de Fourier de f . On sait que f est complètement caractérisé par son spectre. Un échantillonneur

FIGURE 1



nous donne les valeurs de f sur N points $f(nT/N)$, $n = 0, \dots, N-1$. Par définition, la *période d'échantillonnage* est l'écart entre deux mesures successives:

$$T_e = \frac{T}{N}.$$

On veut approcher les coefficients de Fourier de f à l'aide de ces N valeurs. Par périodicité, on peut supposer que l'indice n est un élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, l'anneau des classes d'équivalence d'entiers modulo N . On est donc amené à considérer la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto y_n = f\left(\frac{nT}{N}\right). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on va développer une théorie de Fourier sur les fonctions définies sur le groupe abélien fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et montrer que la transformée de Fourier dite *transformée de Fourier discrète* de $(y_n)_n$ ainsi obtenue est liée aux coefficients de

¹Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*, Princeton Lectures in Analysis, volume 1. Princeton University Press, 2011

Fourier de la fonction échantillonnée f . Nous verrons notamment que sous certaines conditions, les coefficients de Fourier de $(y_n)_n$ sont des bonnes approximations des coefficients de Fourier de f . Nous verrons dans la deuxième partie de ce chapitre un algorithme pour calculer rapidement la transformée de Fourier discrète, la transformation de Fourier rapide (ou FFT, *Fast Fourier Transform en anglais*).

REMARQUE 2.1. Une application de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} peut être considérée comme une suite finie $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$, et sera toujours notée comme telle dans la suite.

2.2. Définition de la transformée de Fourier discrète. Rappelons que les caractères² sur un groupe abélien topologique G sont les morphismes continus de G dans le cercle unité S^1 de \mathbb{C} , muni de la multiplication. On note, pour $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$E_n^k = e^{2ikn\pi/N}.$$

On vérifie facilement que $E_{\ell+N}^k = E_\ell^k$ pour tout entier ℓ , et donc que E^k définit une application de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sur S^1 , i.e. une suite finie $(E_n^k)_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$.

PROPOSITION 2.2. Les caractères sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sont exactement les fonctions E^k , $k = 0, \dots, N-1$.

REMARQUE 2.3. Le groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ étant discret, la continuité dans la définition des caractères de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est automatique. De fait, toute application de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans un espace métrique est continue.

DÉMONSTRATION. Par la formule $e^{a+b} = e^a e^b$, on voit que pour tout j, ℓ de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ on a

$$E_{j+\ell}^k = E_j^k E_\ell^k.$$

Ceci montre que E^k est bien un caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $\varphi = (\varphi_n)_n$ un caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Puisque

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{N \times} = N = 0$$

dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on a

$$1 = \varphi_N = (\varphi_1)^N.$$

Donc φ_1 est une racine N -ième de l'unité. Il existe donc $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que

$$\varphi_1 = e^{2i\pi k/N}.$$

On en déduit, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\varphi_n = \varphi_1^n = e^{2i\pi kn/N},$$

et donc $\varphi = E^k$. □

L'ensemble $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ étant fini, de cardinal N , l'ensemble \mathcal{F}_N des fonctions de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension finie N sur \mathbb{C} . On munit cet espace vectoriel du produit scalaire:

$$(x|y) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n}, \quad x = (x_n)_n, \quad y = (y_n)_n,$$

qui lui confère une structure d'espace hermitien.

²Voir le tronç commun Définition 1.1.4

LEMME 2.4. *La famille des caractères $(E^k)_{0 \leq k \leq N-1}$ est orthogonale. Plus précisément,*

$$(E^k | E^\ell) = \begin{cases} N & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On a

$$(E^k | E^\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2in\pi k}{N}} e^{-\frac{2in\pi \ell}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(k-\ell)}{N}} \right)^n.$$

Si $k = \ell$, $e^{\frac{2i\pi(k-\ell)}{N}} = 1$ et on obtient exactement N comme annoncé. Si $k \neq \ell$, l'hypothèse $0 \leq k, \ell \leq N-1$ montre que $k - \ell$ n'est pas divisible par N et donc $e^{\frac{2i\pi(k-\ell)}{N}}$ est une racine N -ième différente de 1. Il découle de la formule de la somme d'une série géométrique que le produit scalaire précédent est nul. \square

Soit $\tilde{E}^k = \frac{1}{\sqrt{N}} E^k$. La famille $(\tilde{E}^k)_{0 \leq k \leq N-1}$ est une famille orthonormale, de cardinal N de l'espace hermitien \mathcal{F}_N de dimension N . C'est donc une base orthonormale de \mathcal{F}_N . On en déduit, pour tout élément $y \in \mathcal{F}_N$,

$$(3) \quad y = \sum_{k=0}^{N-1} (y | \tilde{E}^k) \tilde{E}^k, \quad \|y\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |(y | \tilde{E}^k)|^2.$$

DÉFINITION 2.5. Pour $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $y = (y_n)_n \in \mathcal{F}_N$, le k -ième coefficient de Fourier discret de y est

$$Y_k = c_k^N(y) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-\frac{2ik\pi n}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} (y | \tilde{E}^k).$$

L'application

$$y \mapsto (c_k^N(y))_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ dans lui-même est appelée *transformation de Fourier discrète*.

Les formules (3) peuvent se réécrire de la manière suivante:

THÉORÈME 2.6. *Soit $y = (y_n)_n \in \mathcal{F}_N$ et $Y = (Y_k)_k$ sa transformée de Fourier discrète. Alors*

$$(4) \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2i\pi n k / N}.$$

De plus

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{N-1} |Y_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2.$$

La formule (4) est un analogue, pour les fonctions sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques sur \mathbb{R} , ou de la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La formule (5) (qui n'est autre que le théorème de Pythagore en dimension N) est un analogue discret des formules de Parseval et Plancherel. Elle montre que la transformation de Fourier discrète est, à une constante multiplicative près, une isométrie pour les normes hermitiennes considérées.

EXEMPLE 2.7. Calculons la transformation de Fourier discrète dans le cas $N = 2$. Soit (y_0, y_1) une application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ et $Y = (Y_0, Y_1)$ sa transformée de Fourier discrète. Alors la définition des coefficients de Fourier discrets donne:

$$Y_0 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1), \quad Y_1 = \frac{1}{2}(y_0 - y_1).$$

Les formules (4) et (5) s'écrivent

$$y_n = Y_0 + (-1)^n Y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}(y_0 - y_1)(-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$Y_0^2 + Y_1^2 = \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(y_0 - y_1)\right)^2 = \frac{1}{2}(y_0^2 + y_1^2).$$

EXERCICE 2.8. Calculer les coefficients de Fourier discrets et écrire (4) et (5) dans le cas $N = 3$.

EXERCICE 2.9. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $\delta^0 = (\delta_n^0)_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$, définie par

$$\delta_0^0 = 1, \quad n \in \{1, \dots, N-1\} \implies \delta_n^0 = 0.$$

sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

REMARQUE 2.10. Les coefficients de Fourier $Y_k = c_k^N(y)$ sont définis à un modulo N prêt. Lorsque N est pair, on peut donc écrire la formule (4)

$$y_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} Y_k e^{2i\pi nk/N},$$

formule plus pertinente lorsque l'on approche les coefficients de Fourier d'une fonction périodique par les coefficients de Fourier discret de ses échantillonnées.

2.3. Convolution.

DÉFINITION 2.11. Soit $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ deux applications de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} . La convolée $z = x * y$ de x et y est la fonction de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} définie par

$$z_n = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} x_\ell y_{n-\ell}.$$

(Comparer avec la définition de deux fonctions sur le tore vue en tronç commun).

PROPOSITION 2.12. La transformée de Fourier discrète de $x * y$ est donnée par

$$c_k^N(x * y) = N c_k^N(x) c_k^N(y), \quad k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant les définitions de $c_k^N(x)$ et $c_k^N(y)$, on obtient

$$N c_k^N(x) c_k^N(y) = \frac{1}{N} \sum_{\ell, n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} x_\ell y_n \left(e^{-\frac{2i\ell\pi}{N}}\right)^k \left(e^{-\frac{2in\pi}{N}}\right)^k.$$

En posant $q = \ell + n$ dans la sommation, on obtient

$$\begin{aligned} N c_k^N(x) c_k^N(y) &= \frac{1}{N} \sum_{q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} x_\ell y_{q-\ell} \left(e^{-\frac{2iq\pi}{N}}\right)^k \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \left(e^{-\frac{2iq\pi}{N}}\right)^k (x * y)_q, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré. \square

EXERCICE 2.13. Vérifier que la fonction δ^0 définie à l'exercice 2.9 est l'élément neutre pour la convolution. Vérifier que ce résultat est cohérent avec la formule de la proposition 2.12.

3. Transformation de Fourier rapide

Étant donnée une fonction $y = (y_n)_n$ définie sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on cherche à calculer ses coefficients de Fourier discrets $Y_k = c_k^N(y)$:

$$Y_k = c_k^N(y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-2in k \pi}{N}}.$$

En supposant connu les y_n et les exponentielles complexes $e^{-2iq\pi/N}$, $q \in \mathbb{Z}$, il faut, pour calculer les N coefficients Y_k :

- $N(N-1)$ multiplications complexes;
- $N(N-1)$ additions complexes;
- N divisions par N ,

soit $N(2N-1) = O(N^2)$ opérations. En 1965, les mathématiciens américains James W. Cooley et John W. Tukey ont proposé un algorithme récursif, la *fast Fourier transform* (FFT), en français transformation de Fourier rapide, qui permet de diminuer drastiquement le coût de ce calcul.

Supposons N pair, $N = 2M$, et que l'on sache calculer la transformée de Fourier discrète d'une fonction x sur $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. On se donne une fonction y de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} , et on note y^0 et y^1 les fonctions de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} définies par

$$y^0 = (y_{2n})_{n \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}, \quad y^1 = (y_{2n+1})_{n \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}.$$

En regroupant les termes pairs et les termes impairs dans la définition 2.5 des coefficients de Fourier discret, on obtient

$$\begin{aligned} c_k^N(y) &= \frac{1}{2M} \left(\sum_{n=0}^{M-1} y_{2n} e^{-\frac{2i(2n)\pi k}{2M}} + \sum_{n=0}^{M-1} y_{2n+1} e^{-\frac{2i(2n+1)\pi k}{2M}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y_{2n} e^{-\frac{2in\pi k}{M}} + e^{\frac{-i\pi k}{M}} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y_{2n+1} e^{-\frac{2in\pi k}{M}} \right) \\ (6) \quad c_k^N(y) &= \frac{1}{2} \left(c_k^M(y^0) + e^{\frac{-i\pi k}{M}} c_k^M(y^1) \right). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.1. *Supposons que N soit une puissance de 2. La formule (6) permet de calculer récursivement la transformée de Fourier discrète d'une fonction sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en $O(N \log N)$ opérations.*

DÉMONSTRATION. Soit A_N le nombre d'opérations nécessaires pour calculer la transformée de Fourier discrète (N étant une puissance de 2). On a $A_2 = 6$ (cf l'exemple 2.7). Par la formule (6),

$$A_{2M} \leq 8M + 2A_M.$$

Par une récurrence élémentaire, cela implique

$$A_M \leq 4M \log_2 M,$$

où \log_2 est le logarithme de base 2. \square

4. Application aux calculs approchés des coefficients d'une fonction périodique

4.1. Approximation par calcul approché de l'intégrale. Soit f une fonction T -périodique. On veut comparer ses coefficients de Fourier avec ceux de la transformée de Fourier des échantillons de f . On a :

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi kt}{T}} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT/N}^{(n+1)T/N} f(t) e^{-\frac{2i\pi kt}{T}} dt.$$

Par la méthode des trapèzes, on approche l'intégrale $\int_{nT/N}^{(n+1)T/N} \dots$ par l'aire du trapèze délimité par la fonction entre $\frac{nT}{N}$ et $\frac{(n+1)T}{N}$, soit

$$\begin{aligned} c_k(f) &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{2N} \left(f\left(\frac{nT}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} + f\left(\frac{(n+1)T}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi k(n+1)}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{nT}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi nk}{N}}. \end{aligned}$$

Notons $f^N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction échantillonnée :

$$f_n^N = f\left(\frac{nT}{N}\right), \quad n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

La formule précédente se lit :

$$c_k(f) \approx c_k^N(f^N).$$

Remarquons que nous n'avons donné aucune estimation de l'erreur. La formule précédente suggère notamment que tous les coefficients de Fourier $c_k(f)$, où les indices k sont choisis dans la même classe modulo N sont proches, ce qui est bien sûr complètement faux ! Lorsque k est grand, la fonction $e^{-2i\pi kt}$ est très oscillante et l'approximation précédente n'est plus valable.

4.2. Polynôme d'interpolation. Nous verrons en travaux dirigés que l'on peut aussi obtenir les $c_k^N(f^N)$, lorsque N est pair, en cherchant le polynôme trigonométrique de période T ,

$$p(t) = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} a_n e^{\frac{2in\pi t}{T}}$$

qui interpole f aux points $\frac{\ell T}{N}$, $\ell = 0, \dots, N-1$.

4.3. Une formule exacte. Nous allons maintenant donner une formule plus précise, en supposant

$$\sum |c_n(f)| < \infty$$

(ce qui est vrai, par exemple, si f est de classe C^1 , par un résultat classique sur les séries de Fourier).

Alors, en notant pour simplifier $c_\ell = c_\ell(f)$,

$$f(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{\frac{2i\pi \ell t}{T}},$$

avec convergence normale sur \mathbb{R} . On en déduit:

$$\begin{aligned} c_k^N(f^N) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{nT}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{\frac{2i\pi \ell n}{N}} e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi n}{N}(\ell-k)}. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi n}{N}(\ell-k)} = \begin{cases} N & \text{si } N \mid \ell - k \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient la formule

$$c_k^N(f^N) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{k+qN},$$

et donc

$$c_k^N(f^N) - c_k(f) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q \neq 0}} c_{k+qN}.$$

Si la fonction f est régulière, ce qui implique que les coefficients de Fourier décroissent vite, les $c_k^N(f^N)$ constituent donc de bonnes approximations des coefficients de Fourier de f , lorsque N est assez grand.

EXEMPLE 4.1. On considère un polynôme trigonométrique de degré 6

$$f(t) = \sum_{n=-6}^{+6} c_n e^{\frac{2i\pi nt}{T}}.$$

Les coefficients de Fourier discrets de degré 4, $c_k^4 := c_k^4(f_4)$ sont donnés par:

$$\begin{aligned} c_0^4 &= c_0 + c_4 + c_{-4} & c_1^4 &= c_1 + c_{-3} + c_5 \\ c_2^4 &= c_2 + c_{-6} + c_{-2} + c_6 & c_{-1}^4 &= c_{-1} + c_3 + c_{-5}. \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que $c_k^N = c_k$ dès que $N \geq 13$. En d'autres termes, pour un tel polynôme trigonométrique, les coefficients de la transformée de Fourier rapide de la fonction échantillonnée sont égaux aux coefficients de Fourier de la fonction dès que le paramètre d'échantillonnage N est au moins égal à 13.

Spectre continu et échantillonnage. Théorème de Shannon

Nous avons vu au chapitre 1 l'effet de l'échantillonnage sur le spectre d'une fonction périodique. Ce spectre est discret et défini par la série de Fourier de la fonction f . Nous allons étudier ici l'échantillonnage de fonctions plus générales, et son effet sur le spectre de la fonction, qui est cette fois défini par la transformation de Fourier. On commence par quelques rappels sur la transformation de Fourier des distributions tempérées. On omet les démonstrations, qui ont été vues dans le tronc commun du cours d'analyse harmonique.

1. Transformation de Fourier des distributions tempérées

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est donnée par

$$(7) \quad (\mathcal{F}f)(\tau) = \hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau} f(t) dt.$$

REMARQUE 1.1. Dans le cours du tronc commun, la transformée de Fourier dépendait d'un paramètre de normalisation h (l'exponentielle dans l'intégrande étant donc $e^{-i\frac{t\tau}{h}}$). Dans toute la partie "appliquée" du cours, la constante h sera fixée à $\frac{1}{2\pi}$ comme dans (7). Avec les notations du cours de tronc commun, on a donc:

$$d = 1, \quad h = 1/2\pi, \quad \mathcal{F} = F_{1/2\pi}.$$

On montre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in C_b^0(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\tau) = 0.$$

On définit de même manière la transformée inverse de $g \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\overline{\mathcal{F}}g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\tau t} g(\tau) d\tau = (\mathcal{F}g)(-t).$$

On a la formule d'inversion de Fourier:

$$\left(f \in L^1 \text{ et } \hat{f} \in L^1 \right) \implies \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f.$$

(Cf cours de tronc commun, Théorème 2.1.1). On peut étendre la transformation de Fourier à un espace beaucoup plus gros que $L^1(\mathbb{R})$, l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dont on rappelle rapidement la définition.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à valeurs complexes, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées: pour une fonction f , de classe C^∞

sur \mathbb{R} , on a par définition

$$(8) \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \iff \forall N \in \mathbb{N}, \quad p_N(f) := \sum_{0 \leq j \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^j |f^{(j)}(t)| < \infty.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est muni d'une topologie que l'on peut définir par la convergence des suites¹: par définition, une suite $(f_k)_k$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_N(f_k - f) = 0.$$

On définit l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des *distributions tempérées* comme le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui sont continues au sens de la topologie précédente. On vérifie facilement que si Φ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), |\langle \Phi, f \rangle| \leq C p_N(f).$$

On munit $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la topologie de la convergence simple: par définition, une suite $(\Phi_n)_n$ de distributions tempérées converge vers une distribution tempérée Φ si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi_n, f \rangle = \langle \Phi, f \rangle.$$

Soit $p \in [1, \infty]$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, la forme linéaire Φ_f sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par

$$(9) \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \Phi_f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt$$

est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. L'application linéaire $f \mapsto \Phi_f$ est une injection continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, qui permet d'identifier $L^p(\mathbb{R})$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour alléger les notations, on note simplement f (au lieu de Φ_f) la distribution tempérée associée à f .

On peut de même identifier les espaces $C_b^0(\mathbb{R})$ (des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}), et L_T^p (des fonctions périodiques de période T , localement dans L^p) à des sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Un exemple important de distribution tempérée qui n'est pas une fonction est la masse de Dirac δ_a au point $a \in \mathbb{R}$, définie par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta_a, f \rangle = f(a).$$

On considérera aussi le peigne de Dirac de période $a > 0$:

$$\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na},$$

la série convergeant au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est à dire:

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \Delta_a, f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^{+N} f(na).$$

On définit par dualité, à partir des mêmes opérations sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, les opérations suivantes sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: la dérivation, la multiplication par une fonction et la transformation de Fourier.

¹Il est montré en tronç commun que l'on peut munir l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Fréchet grâce à la famille de normes p_N définie en (8). Nous n'aurons pas besoin de cette notion dans ce cours.

La *dérivée* d'une distribution tempérée Φ est la distribution tempérée Φ' définie par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \Phi', f \rangle = -\langle \Phi, f' \rangle.$$

L'application $f \mapsto f'$ étant continue sur \mathcal{S} , l'application linéaire Φ' ainsi obtenue est bien un élément de \mathcal{S}' .

Soit g une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , à croissance au plus polynomiale ainsi que toutes ses dérivées². On remarque que $f \mapsto fg$ est une application linéaire continue de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . Pour toute distribution Φ , on peut donc définir le produit $g\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle g\Phi, f \rangle = \langle \Phi, gf \rangle.$$

On définit la transformation de Fourier sur \mathcal{S}' en remarquant que la transformée de Fourier (définie par la formule (7)) est une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui vérifie de plus:

$$(10) \quad \forall (f, g) \in \mathcal{S}^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)dt.$$

On définit donc la transformée de Fourier $\mathcal{F}\Phi = \hat{\Phi}$ d'une distribution Φ par

$$(11) \quad \forall g \in \mathcal{S}, \quad \langle \hat{\Phi}, g \rangle = \langle \Phi, \hat{g} \rangle.$$

On vérifie que la transformation de Fourier \mathcal{F} ainsi définie est une application continue de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' .

On peut maintenant définir de deux manières la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$: par la formule (7), ou par la formule (11), en considérant f comme une distribution tempérée. La formule (10) et un argument de densité montrent que ces deux définitions coïncident.

On peut définir de la même manière la transformée de Fourier inverse d'une distribution tempérée, par la formule:

$$(12) \quad \forall g \in \mathcal{S}, \quad \langle \overline{\mathcal{F}\Phi}, g \rangle = \langle \Phi, \overline{\mathcal{F}g} \rangle,$$

et on a la formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S}' :

$$\forall \Phi \in \mathcal{S}', \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}\Phi} = \overline{\mathcal{F}\mathcal{F}\Phi} = \Phi.$$

On calcule aisément la transformée de Fourier de la masse de Dirac en 0 (cf §2):

$$\mathcal{F}\delta_0 = 1$$

(la fonction constante égale à 1), et plus difficilement celle du peigne de Dirac (cf le livre de Gasquet et Witomski, formule 31(10)):

$$\mathcal{F}\Delta_a = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}.$$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier d'un élément f de $L^2(\mathbb{R})$ est bien définie. On a (théorème de Plancherel):

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau.$$

²L'espace vectoriel formé de ces fonctions était noté \mathcal{P} dans le cours du tronc commun d'analyse harmonique

On rappelle que la *convolée* de deux fonctions f et g de $L^1(\mathbb{R})$ est définie par

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds,$$

et que $(f, g) \rightarrow f * g$ est une forme bilinéaire continue de $L^1 \times L^1$ dans L^1 . La transformée de Fourier transforme la convolution en multiplication.

$$\forall f \in L^1, \forall g \in L^1, \forall \tau \in \mathbb{R}, \widehat{f * g}(\tau) = \widehat{f}(\tau)\widehat{g}(\tau),$$

le produit $\widehat{f}(\tau)\widehat{g}(\tau)$ étant bien défini, comme produit de fonctions continues.

On peut étendre la convolution à des couples plus généraux de distributions tempérées, avec des conditions supplémentaires sur ces distributions. On peut ainsi définir la convolée d'un élément de \mathcal{S} et d'un élément de \mathcal{S}' , ou plus généralement d'un élément f de \mathcal{S}' tel que \widehat{f} est dans \mathcal{P} , et d'un élément g de \mathcal{S}' . La formule $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ reste alors valable. La masse de Dirac δ_0 est l'élément neutre pour la convolution sur \mathcal{S}' .

2. Spectre, séries de Fourier et transformation de Fourier

DÉFINITION 2.1. Le *spectre* d'un signal analogique $x(t)$ est la transformée de Fourier $\widehat{x}(\tau)$ de $x(t)$.

Au chapitre précédent, on a donné une autre définition du spectre d'un signal analogique périodique $x \in L^1_T$ (cf §1 pour la définition de cet espace) comme l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{n}{T}, c_n(x) \right), n \in \mathbb{Z} \right\},$$

où les $c_n(x)$ sont les coefficients de Fourier:

$$c_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

Nous allons voir que ces deux définitions sont essentiellement identiques.

Considérons d'abord un signal sinusoïdal monochromatique

$$(13) \quad x(t) = \alpha e^{2i\pi t \mu}.$$

On rappelle le calcul de la transformation de Fourier de δ_μ . On a, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \widehat{\delta}_\mu, f \rangle = \langle \delta_\mu, \widehat{f} \rangle = \widehat{f}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi \tau \mu} f(\tau) d\tau,$$

et la transformée de Fourier de δ_μ est donc $\tau \mapsto e^{-2i\pi \tau \mu}$. Par la formule d'inversion de Fourier, la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{2i\pi t \mu}$ est δ_μ .

Le spectre de $x(t) = \alpha e^{2i\pi t/T}$ est donc $(1/T, \alpha)$ (au sens du Chapitre 1) et $\alpha \delta_{\frac{1}{T}}$ (au sens de la définition 2.1).

Considérons maintenant un signal périodique plus général, $x \in L^1_T$. Comme auparavant, on peut identifier x à la distribution tempérée

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi(t) dt.$$

Le théorème suivant montre que la série de Fourier de x converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et compare la somme de cette série de Fourier à la transformée de Fourier de x , considérée comme une distribution tempérée.

THÉORÈME 2.2. Si $x \in L^1_T$, alors

$$(14) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{\frac{2ik\pi t}{T}} \text{ dans } \mathcal{S}'$$

$$(15) \quad \widehat{x}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \delta_{\frac{k}{T}} \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

La formule (14) signifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k(x) \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2ik\pi t}{T}} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi(t) dt,$$

et la formule (15)

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \varphi\left(\frac{k}{T}\right).$$

La formule (15) montre que le spectre de x est $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n(x) \delta_{n/T}$, en accord avec le Chapitre 1 qui définissait ce spectre comme l'ensemble $\left\{ \left(\frac{n}{T}, c_n(x) \right), x \in \mathbb{Z} \right\}$.

PREUVE DU THÉORÈME. La formule (15) découle immédiatement de la formule (14), de la continuité de la transformation de Fourier dans \mathcal{S}' et du calcul de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique fait plus haut.

Montrons (14). On commence par montrer que cette formule est vraie pour $x \in L^2_T$. Dans ce cas, par la théorie des séries de Fourier,

$$(16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{\frac{2ik\pi t}{T}} = x(t),$$

où la convergence a lieu dans L^2_T , et donc, par périodicité, en norme L^2 sur tout intervalle fini. Notons

$$R_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) e^{\frac{2ik\pi t}{T}}.$$

La fonction R_N est périodique, de période T , et vérifie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N\|_{L^2_T} = 0,$$

Fixons $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} R_N(t) \varphi(t) dt \right| &= \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{jT}^{(j+1)T} R_N(t) \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sqrt{\int_{jT}^{(j+1)T} |R_N(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{jT}^{(j+1)T} |\varphi(t)|^2 dt} \\ &\leq \|R_N\|_{L^2_T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sqrt{\int_{jT}^{(j+1)T} |\varphi(t)|^2 dt} \leq \|R_N\|_{L^2_T} C_T \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{p_2(\varphi)^2}{(|j|+1)^4}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé Cauchy-Schwarz successivement sur chaque intervalle $[jT, (j+1)T]$. La constante C_T ne dépend que de T . La notation p_2 est définie en (8).

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} R_N(t) \varphi(t) dt \right| = 0,$$

ce qui montre la convergence (14) lorsque $x \in L_T^2$.

Pour généraliser à $x \in L_T^1$, on commence par remarquer que L_T^2 est dense dans L_T^1 : en effet, les fonctions continues périodiques de période T sont denses dans L_T^1 , et ces fonctions sont clairement dans L_T^2 . On montre ensuite que, φ étant fixé dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, les formes linéaires

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi(t) dt$$

et

$$x \mapsto \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2ik\pi t}{T}} \varphi(t) dt$$

sont bien définies, et continues, sur L_T^1 (le deuxième point découle de la borne $|c_k(x)| \leq \|x\|_{L_T^1}$ et du fait que la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2ik\pi t}{T}} \varphi(t) dt$ est absolument convergente, $\hat{\varphi}$ étant dans \mathcal{S}). Ces deux formes linéaires coïncidant sur L_T^2 , on en déduit qu'elles sont égales sur L_T^1 , ce qui signifie exactement

$$\forall x \in L_T^1, \quad \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} c_k(x) \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2ik\pi t}{T}} \varphi(t) dt,$$

et conclut la preuve, puisque $\varphi \in \mathcal{S}$ est arbitraire. \square

3. Formule de Poisson et échantillonnage

On considère maintenant un signal analogique $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On suppose que sa transformation de Fourier \hat{f} est à support compact, c'est à dire

$$(17) \quad \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_c, \lambda_c],$$

pour un certain $\lambda_c > 0$, ce qui par définition signifie:

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp } \varphi \cap [-\lambda_c, \lambda_c] = \emptyset \implies \langle f, \varphi \rangle = 0.$$

On admet que cette hypothèse implique que f est en fait une fonction de classe C^∞ et que

$$(18) \quad \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C(1 + |x|)^C.$$

On définit l'échantillonné de f de période $a > 0$ comme la distribution

$$af\Delta_a = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \delta_{na}.$$

On déduit facilement de (18) que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \delta_{na}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ce qui montre que la définition de $af\Delta_a$ a un sens.

EXEMPLE 3.1. Un polynôme trigonométrique

$$f(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{2\pi i \lambda_k t}$$

vérifie les hypothèses précédentes. En effet, sa transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{f} = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{\lambda_k}.$$

Donc

$$\text{supp } \hat{f} = \{\lambda_k, k = 1, \dots, N\}$$

et (17) est vérifié avec $\lambda_c = \sup_k |\lambda_k|$.

THÉORÈME 3.2. *Supposons $f \in \mathcal{S}'$ et $\text{supp } \hat{f}$ à support compact. Alors*

$$af\widehat{\Delta}_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\cdot - \frac{n}{a}\right) \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

En d'autres termes, le spectre de l'échantillonné (avec une période d'échantillonnage a) est le périodisé (de période $1/a$) du spectre de f .

On rappelle que les hypothèses du théorème 3.2 impliquent que f est une fonction C^∞ .

Dans la conclusion du théorème, la notation $\hat{f}\left(\cdot - \frac{n}{a}\right)$ désigne la fonction

$$\lambda \mapsto \hat{f}\left(\lambda - \frac{n}{a}\right).$$

Lorsque \hat{f} est une distribution tempérée, on peut définir la distribution $\hat{f}\left(\cdot - \frac{n}{a}\right)$ par

$$\left\langle \hat{f}\left(\cdot - \frac{n}{a}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \varphi\left(\cdot + \frac{n}{a}\right) \right\rangle,$$

où $\varphi\left(\cdot + \frac{n}{a}\right)$ est la fonction

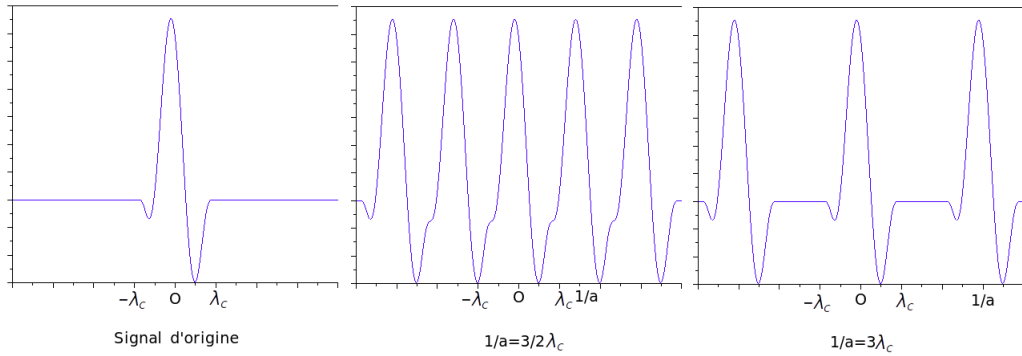
$$\lambda \mapsto \varphi\left(\lambda + \frac{n}{a}\right).$$

Par exemple lorsque $\hat{f} = \delta_c$, $\hat{f}\left(\cdot - n\right) = \delta_{c-n}$.

COROLLAIRE 3.3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus (17) et $\frac{1}{a} > 2\lambda_c$, alors \hat{f} est uniquement déterminé par $af\widehat{\Delta}_a$.*

En effet, la restriction de $af\widehat{\Delta}_a$ à $[-\lambda_c, \lambda_c]$ est exactement \hat{f} . (la fréquence $2\lambda_c$ est parfois appelé taux de Nyquist, *Nyquist rate* en anglais). Voir Figure 1.

FIGURE 1. $F(\lambda)$ pour différentes valeurs de a



PREUVE DU THÉORÈME 3.2. Pour simplifier, on donne la preuve dans le cas particulier où \hat{f} est un élément de L^1 . Par la formule d'inversion de Fourier, f est une fonction continue et bornée.

La preuve dans le cas général est donné dans le livre de Gasquet et Witonski, chapitre 37.

Soit

$$(19) \quad F(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\lambda - \frac{n}{a}\right).$$

Puisque \hat{f} est à support compact, la somme précédente est en fait, à λ fixé, une somme finie. La fonction F est périodique, de période $1/a$. En effet:

$$F(\lambda + 1/a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\lambda - \frac{n-1}{a}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\lambda - \frac{n}{a}\right)$$

par un simple décalage d'indice.

La restriction $F|_{[0, 1/a]}$ est une somme finie de fonctions de L^1 . C'est donc une fonction L^1 . Ses coefficients de Fourier (pour la période $1/a$) sont donnés par

$$c_k(F, 1/a) = a \int_0^{1/a} F(\lambda) e^{-2ika\lambda} d\lambda = a \int_0^{1/a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\lambda - \frac{n}{a}\right) e^{-2ika\lambda} d\lambda.$$

Les grands indices n apportant une contribution nulle, la somme précédente est en fait finie, et on peut sans crainte échanger l'intégrale et la somme:

$$\begin{aligned} c_k(F, 1/a) &= a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/a} \hat{f}\left(\lambda - \frac{n}{a}\right) e^{-2ika\lambda} d\lambda = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a \underbrace{e^{-2ik\pi n}}_{=1} \int_{-n/a}^{(1-n)/a} \hat{f}(\lambda) e^{-2ik\pi a\lambda} d\lambda = a \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{-2ik\pi a\lambda} d\lambda = af(-ka), \end{aligned}$$

par la formule d'inversion de Fourier.

Par la formule (14) du théorème 2.2,

$$F(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} af(-ka) e^{2ik\pi\lambda a} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} af(ka) e^{-2ik\pi\lambda a},$$

dans \mathcal{S}' . (C'est la *formule de Poisson*, déjà mentionnée dans le tronc commun du cours).

Puisque $e^{-2ik\pi\lambda a} = \widehat{\delta_{ka}}$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} af(ka) e^{-2ik\pi\lambda a} = a \widehat{\Delta_a f},$$

ce qui conclut la preuve. □

4. Formule d'échantillonnage

Sous les hypothèses de Corollaire 3.3, il est donc possible de retrouver la fonction f à partir de son échantillonnée. On donne maintenant une formule exacte (appelée formule d'échantillonnage, ou *formule de Shannon* ou *de Shannon-Nyquist*) permettant de calculer f en fonction des $\{f(na)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

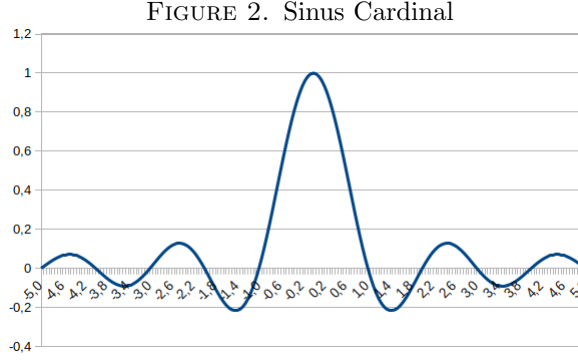
DÉFINITION 4.1. La fonction sinus cardinal, notée sinc, est la fonction paire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$(20) \quad \text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

On montre facilement que la fonction sinc est de classe C^∞ . En effet, par le développement en séries entières du sinus en 0 on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \sum_{k \geq 0} \frac{(\pi t)^{2k}}{(2k+1)!}.$$

La fonction sinc est donc développable en séries entières sur \mathbb{R} .



THÉORÈME 4.2. Supposons $f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda_c > 0$ tel que $\text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_c, \lambda_c]$. Alors

$$(21) \quad \forall a > 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2 < \infty.$$

De plus, pour tout $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$,

$$(22) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \text{sinc}\left(\frac{t-na}{a}\right),$$

au sens de la norme L^2 . La convergence est uniforme dès que $\sum |f(na)| < \infty$.

DÉMONSTRATION. Par le théorème de Plancherel, \hat{f} est dans $L^2(\mathbb{R})$. Puisque c'est une fonction à support compact, on obtient que aussi $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $f \in C_b^0(\mathbb{R})$.

On utilise la fonction périodique $F(\lambda)$ définie par (19). En utilisant que $\hat{f} \in L^2$, on montre facilement que F est dans $L^2_{1/a}$. Les coefficients de Fourier de F (pour la période $1/a$) vérifient donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(F)|^2 < \infty.$$

Par la preuve du Théorème 3.2, on a $c_k(F) = af(-ka)$, et donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(ka)|^2 < \infty.$$

Supposons maintenant $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$. Alors $\hat{f}(\lambda) = F(\lambda)$ pour $-\frac{1}{2a} \leq \lambda \leq \frac{1}{2a}$. On a donc, avec convergence dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\lambda) = F(\lambda) \mathbb{1}_{[-1/(2a), 1/(2a)]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) \mathbb{1}_{[-1/(2a), 1/(2a)]} e^{2i\pi n \lambda a}.$$

Par la formule d'inversion de Fourier, et le fait que la transformation de Fourier est un isomorphisme de L^2 ,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-1/(2a), 1/(2a)]} e^{2i\pi n \lambda a})(t)$$

au sens de la norme L^2 sur \mathbb{R} . Il reste à calculer

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-1/(2a), 1/(2a)]} e^{2i\pi n \lambda a})(t) \\ &= \int_{-1/(2a)}^{1/(2a)} e^{2i\pi(\lambda t + n \lambda a)} d\lambda = \frac{e^{\frac{2i\pi(t+na)}{2a}} - e^{\frac{-2i\pi(t+na)}{2a}}}{2i\pi(t+na)} = \frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a} + n\right). \end{aligned}$$

□

EXERCICE 4.3. Montrer que la fonction $f = \operatorname{sinc}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent. Quelle est la fréquence λ_c ? Ecrire la conclusion du théorème.

On remarque que le théorème précédent reste vrai pour les fonctions trigonométriques (i.e. les sommes finies de signaux monochromatiques), même si l'hypothèse $\hat{f} \in L_T^2$ est bien sûr fautive:

THÉORÈME 4.4. *Soit*

$$f(t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{2i\pi \lambda_n t}$$

une fonction trigonométrique, où les λ_n sont des nombres réels et les c_n des nombres complexes non nul. Notons $\lambda_c = \sup_{0 \leq n \leq N} |\lambda_n|$. Alors la formule (22) est valable pour $a < 1/(2\lambda_c)$, avec convergence ponctuelle.

DÉMONSTRATION. Par linéarité, il suffit de montrer la formule pour

$$f(t) = e^{2i\pi \lambda t},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie $|\lambda| < 1/(2a)$.

On considère la fonction g , périodique de période $1/a$, telle:

$$\forall \lambda \in (-1/(2a), 1/(2a)), \quad g(\lambda) = e^{2i\pi \lambda t},$$

où t est fixé dans \mathbb{R} . Ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(g, 1/a) = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2i\pi \lambda t} e^{-2i\pi \lambda k a} d\lambda = \frac{e^{\frac{i\pi}{a}(t-ka)} - e^{-\frac{i\pi}{a}(t-ka)}}{\frac{2i\pi}{a}(t-ka)} = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a} - k\right).$$

Par le théorème de Dirichlet³

$$e^{2i\pi \lambda t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a} - k\right) e^{2i\pi k a \lambda},$$

avec convergence ponctuelle pour $\lambda \in (-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$, ce qui montre la formule de Shannon dans ce cas. □

³Ce théorème implique que la série de Fourier d'une fonction f périodique, C^1 par morceaux, converge simplement vers f aux points de continuité de f .

CHAPITRE 3

Filtres analogiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux systèmes analogiques $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, où \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont des sous-ensembles de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On va plus précisément considérer une classe particulière de systèmes analogiques, appelés filtres, qui sont d'une grande utilité pratique.

1. Définitions et exemples

DÉFINITION 1.1. Un *filtre analogique* est une application linéaire continue A de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} (où \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) qui est invariante par translation:

$$\forall T \in \mathbb{R}, \quad A\tau_T = \tau_TA,$$

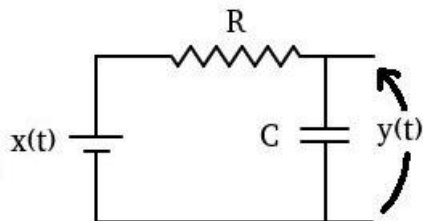
où par définition

$$(\tau_T\varphi)(t) = \varphi(t - T).$$

- L'amplificateur idéal $y(t) = qx(t)$, $q > 0$.
- La ligne à retard $y(t) = x(t - a)$ (ou $a > 0$ est un paramètre).
- Le dérivateur $y(t) = x'(t)$.
- Le filtre à moyenne glissante $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds$, où $T > 0$ est un paramètre.

Il faut bien sûr spécifier, dans chacun de ces exemples, les espaces \mathcal{X} et \mathcal{Y} . Dans les trois premiers exemples, on peut prendre $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour le filtre à moyenne glissante, il faut pouvoir définir l'intégrale. $\mathcal{X} = L^1$, $\mathcal{Y} = L^\infty$ conviennent.

FIGURE 1. Circuit RC



On considère maintenant un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité $C > 0$) et d'une résistance R (cf Figure 1). L'entrée est la différence de potentiel $x(t)$ aux bornes du circuit. La différence de potentiel aux bornes du condensateur est alors solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1.

$$x(t) = RCy'(t) + y(t).$$

On voit que pour déterminer $y(t)$ de manière unique, il faut préciser une condition initiale. On impose que si le signal d'entrée est nul pour des temps très négatifs, il en est de même pour y (ceci est lié à la notion de causalité définie plus loin). On obtient la formule:

$$(23) \quad y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Cette formule définit bien un filtre (par exemple de \mathcal{S} dans \mathcal{S} ou de L^1 dans L^1), appelé *filtre RC*.

La suite de ce chapitre est dédiée à l'étude systématique des filtres analogiques. On y montre, sous certaines hypothèses, que pour un tel filtre le signal de sortie s'écrit toujours comme la convolée du signal d'entrée par une certaine fonction, ou, de manière équivalente, que le spectre du signal de sortie s'écrit comme le produit du spectre du signal d'entrée par une certaine fonction. On étudie ensuite des classes importantes d'exemples de filtres analogiques.

2. Filtre et convolution, réponse impulsionnelle

2.1. Filtre défini par une convolution. On introduit ici une classe très générale de filtre, les filtres par convolution. On rappelle que \mathcal{P} est l'ensemble des fonctions C^∞ à croissance lente, c'est à dire:

$$f \in \mathcal{P} \iff \forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(k)}(x)| \leq C_k(1 + |x|)^{C_k}.$$

Si $f \in \mathcal{P}$ et $\Phi \in \mathcal{S}'$ (respectivement \mathcal{S}), le produit $f\Phi$ est bien défini et comme élément de \mathcal{S}' (respectivement \mathcal{S}). Ceci définit une application linéaire continue $\Phi \mapsto f\Phi$ de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' . Si maintenant $h \in \mathcal{S}'$ vérifie $\hat{h} \in \mathcal{P}$, on peut définir la convolution $\Phi * h$ pour tout Φ de \mathcal{S}' par la formule

$$\widehat{\Phi * h} = \hat{\Phi} \hat{h}.$$

PROPOSITION 2.1. *Soit $h \in \mathcal{S}'$ tel que $\hat{h} \in \mathcal{P}$. Alors*

$$A : u \mapsto h * u$$

définit un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' .

Pour tout h de L^1 , la même formule définit un filtre de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

DÉMONSTRATION. La linéarité de A est évidente. Les propriétés de continuité de la convolution ont été vues dans le tronc commun du cours d'analyse harmonique. Il reste à montrer que la convolution commute avec τ_a . On rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'$,

$$\widehat{\tau_a \varphi}(\lambda) = e^{-2i\pi a \lambda} \hat{\varphi}(\lambda).$$

On a donc, dès que $\hat{h} \in \mathcal{P}$ et $u \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}(h * (\tau_a u)) = \hat{h} \widehat{\tau_a u} = \hat{h} e^{-2i\pi \lambda a} \hat{u}(\lambda) = e^{-2i\pi \lambda a} \hat{h} \hat{u}(\lambda) = \mathcal{F}(\tau_a(h * u)),$$

ce qui montre que A (considéré comme un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S}) et τ_a commute. La même formule fonctionne lorsque $h \in L^1$. On peut alors montrer (en raisonnant par densité) que A est un filtre dans tous les cas considérés. \square

EXEMPLES 2.2. Les filtres RC , à moyenne glissante et dérivateur entrent dans ce cadre. Pour le filtre RC (en notant x le signal d'entrée et y le signal de sortie),

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds,$$

et donc $h(t) = \frac{1}{RC} \mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-\frac{t}{RC}}$. On a bien $h \in L^1$ et on peut vérifier aussi que $\hat{h} \in \mathcal{P}$, en le calculant. On trouve:

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{1 + 2i\pi\lambda RC},$$

ce qui donne bien un élément de \mathcal{P} .

Pour le filtre à moyenne glissante, on a $h(t) = \frac{1}{T} \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$ (donc h est dans L^1), et \hat{h} est égale, à une multiplication par une exponentielle complexe et un changement d'échelles prêt, à la fonction sinus cardinal. C'est bien un élément de \mathcal{P} .

Dans le cas du filtre dérivateur, on vérifie que

$$h = \delta'_0,$$

convient. On a donc

$$\hat{h}(\lambda) = 2i\pi\lambda.$$

Cette fois h n'est pas dans L^1 mais \hat{h} est bien dans \mathcal{P} .

Mentionnons que nous verrons très bientôt que h est donné par la formule $h = A\delta_0$, ce qui peut se vérifier dans les exemples précédents.

Dans les trois exemples précédents, le filtre a une expression simple pour un signal d'entrée dans \mathcal{S} (ou plus généralement dans L^1). Le fait qu'il puisse s'écrire comme une convolution par un élément de \mathcal{FP} montre qu'il définit aussi un filtre sur \mathcal{S}' . On peut se demander l'intérêt, du point de vue des implications, de définir un filtre sur des distributions tempérées générales, mais ces distributions tempérées peuvent représenter des signaux très concrets, comme par exemple l'impulsion de Dirac δ_0 en 0.

REMARQUE 2.3. Du point de vue du spectre, les filtres définis par la proposition 2.1 s'expriment comme la multiplication du spectre par la fonction $\hat{h}(\lambda)$:

$$\widehat{Ax}(\lambda) = \hat{h}(\lambda)\hat{x}(\lambda).$$

Il peut être parfois plus commode de définir le filtre en choisissant $\hat{h}(\lambda)$ (plutôt que $h(t)$). Cette fonction $\hat{h}(\lambda)$ est la *fonction de transfert* du filtre (cf §2.3).

EXERCICE 2.4. Calculer \hat{h} dans le cas du filtre à moyenne glissante.

EXERCICE 2.5. Donner l'exemple d'une fonction h qui est dans L^1 mais telle que \hat{h} n'est pas dans \mathcal{P} .

2.2. Réponse impulsionnelle. Le type de filtre décrit précédemment est en fait très général. La fonction h se calcule facilement à partir du filtre A .

DÉFINITION 2.6. la *réponse impulsionnelle* d'un filtre A est (quand elle est définie) $A\delta_0$, le signal de sortie obtenu lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac.

THÉORÈME 2.7. Soit A un filtre de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' dont la restriction à \mathcal{S} est un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . Soit $h = A\delta_0$. Alors $\hat{h} \in \mathcal{P}$ et

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}', \quad A\varphi = h * \varphi.$$

Nous donnons une démonstration presque complète en appendice de ce chapitre. Les détails de la démonstration ne sont pas exigibles en examen, mais les deux idées principales doivent être comprises et retenues:

- Un filtre A est invariant. Il commute donc avec la convolution par une fonction, puisque cette dernière s'exprime comme une intégrale de translations en temps et que A commute avec les translations en temps.
- On a donc $A(\delta_0 * f) = A(\delta_0) * f$, ce qui donne le résultat souhaité puisque δ_0 est l'élément neutre pour la convolution.

EXEMPLES 2.8. On retrouve, en faisant formellement $x = \delta_0$ dans les formules intégrales définissant les filtre à moyenne glissante et RC , les expressions de h trouvées précédemment. Pour le filtre dérivateur, on retrouve immédiatement $h = \delta'_0$.

2.3. Fonction de transfert. On commence par analyser l'effet d'un filtre sur une fonction monochromatique. On rappelle la notation:

$$e_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}.$$

PROPOSITION 2.9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un filtre analogique. Supposons $e_\lambda \in \mathcal{X}$. Alors e_λ est une fonction propre de A : il existe un nombre complexe $H(\lambda)$ tel que

$$Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda.$$

DÉFINITION 2.10. La fonction $\lambda \mapsto H(\lambda)$, définie sur $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid e_\lambda \in \mathcal{X}\}$, est appelé *fonction de transfert* du filtre A .

PREUVE DE LA PROPOSITION. Soit $f_\lambda = Ae_\lambda$. On a (en notant comme auparavant $\tau_u(g)(t) = g(t - u)$ la translatée d'un signal g par un temps u)

$$\tau_u e_\lambda = e^{-2i\pi\lambda u} e_\lambda.$$

On en déduit, par linéarité

$$A(\tau_u e_\lambda) = e^{-2i\pi\lambda u} Ae_\lambda = e^{-2i\pi\lambda u} f_\lambda.$$

Par invariance du filtre,

$$A(\tau_u e_\lambda) = \tau_u Ae_\lambda = \tau_u f_\lambda.$$

On a montré $\tau_u f_\lambda = e^{-2i\pi\lambda u} f_\lambda$, pour tout $u \in \mathbb{R}$. En appliquant cet égalité au temps $t = 0$, on obtient

$$f_\lambda(-u) = e^{-2i\pi\lambda u} f_\lambda(0),$$

soit

$$f_\lambda = f_\lambda(0)e_\lambda,$$

ce qui donne le résultat demandé. La fonction de transfert $H(\lambda)$ étant donnée par

$$H(\lambda) = f_\lambda(0) = (Ae_\lambda)(0).$$

□

La fonction de transfert est en fait la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle:

THÉORÈME 2.11. Soit A un filtre défini par une convolution:

$$Af = h * f,$$

avec $h \in \mathcal{S}'$ et $\hat{h} \in \mathcal{P}$ ou $h \in L^1$. Alors

$$H(\lambda) = \hat{h}(\lambda).$$

Ainsi,

$$\widehat{Af}(\lambda) = H(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$(e_\mu * \varphi)(t) = \int \varphi(s)e^{2i\pi\mu(t-s)}ds = e^{2i\pi\mu t}\hat{\varphi}(\mu).$$

En d'autres termes,

$$(24) \quad e_\mu * \varphi = \hat{\varphi}(\mu)e_\mu.$$

Si $h \in \mathcal{S}$, on obtient immédiatement

$$Ae_\mu = e_\mu * h = \hat{h}(\mu)e_\mu,$$

et donc

$$H(\mu) = \hat{h}(\mu).$$

On peut en déduire le cas général par un argument de densité, détaillé dans l'appendice de ce chapitre. \square

Donnons quelques exemples.

La fonction de transfert du dérivateur est donnée par $\lambda \mapsto 2i\pi\lambda$.

La fonction de transfert de la ligne à retard $x \mapsto x(t-a)$ est $\lambda \mapsto e^{-2i\pi\lambda a}$.

La fonction de transfert du filtre à moyenne glissante de période T est

$$H : \lambda \mapsto \frac{1 - e^{-2i\pi\lambda T}}{2i\pi T\lambda}$$

(avec $H(0) = 1$). Le filtre à moyenne glissante atténue les hautes fréquences ($|H(\lambda)| \lesssim 1/|\lambda|$ pour des grands λ) mais transforme très peu les basses fréquences (H est proche de 1 près de $\lambda = 0$). On dit que c'est un filtre *passé-bas*. Ce type de filtre sera étudié en §4.

On vérifie facilement que dans chaque cas $H(\lambda) = \hat{h}(\lambda)$.

2.4. Conclusion. En oubliant les hypothèses précises, on peut résumer la partie 2 de la manière suivante.

L'effet d'un filtre A sur un signal d'entrée x peut s'écrire comme une convolution:

$$Ax = x * h.$$

La fonction (ou distribution) h est appelée réponse impulsionnelle et est donnée par

$$h = A\delta_0,$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0. Le filtre multiplie le spectre du signal d'entrée par la fonction $H(\lambda) = \hat{h}(\lambda)$, appelée fonction de transfert:

$$\widehat{Ax} = H(\lambda)\hat{x}(\lambda).$$

On a en particulier:

$$Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda.$$

3. Propriétés des filtres

On étudie (à la lumière des résultats précédents liant filtre et convolution) deux propriétés standards des filtres: la stabilité et l'invariance.

3.1. Filtre stable et réponse indicielle.

DÉFINITION 3.1. Un filtre $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est dit *stable* lorsque il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in L^\infty \cap \mathcal{X}, Ax \in L^\infty \text{ et } \|Ax\|_{L^\infty} \leq C\|x\|_{L^\infty}.$$

La *réponse indicielle* d'un filtre stable est par définition

$$h_1 = Au,$$

où u est l'échelon unité de Heaviside $u = \mathbb{1}_{[0, \infty)}$.

EXEMPLES 3.2. Les filtres *RC* et à moyenne glissante sont stables (à vérifier). Le filtre dérivateur n'est pas stable: L^∞ n'est pas stable par dérivation.

PROPOSITION 3.3. Soit A un filtre défini par une convolution

$$Ax = h * x,$$

avec $h \in L^1$. Alors A est stable et

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds.$$

DÉMONSTRATION. Le premier point est une propriété standard de la convolution, vue dans le tronc commun d'analyse harmonique:

$$\|h * x\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^1} \|x\|_{L^\infty}.$$

Le deuxième point s'obtient immédiatement par la définition de la convolution:

$$h_1 = h * u = \int_{-\infty}^t h(s) ds.$$

□

DÉFINITION 3.4. Sous les hypothèses de la proposition précédente, le *gain* du filtre stable A est donné par

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi 0s} h(s) ds = H(0).$$

Le *temps de réponse* du filtre est le temps t_r nécessaire pour que la réponse indicielle $h_1(t)$ atteigne un certain pourcentage du gain, généralement 95%, c'est à dire le plus petit $t_r > 0$ tel que

$$\forall t \geq t_r, \quad |h_1(t) - K| \leq \frac{K}{20}.$$

EXERCICE 3.5. Calculer la réponse indicielle, le gain et le temps de réponse des filtres *RC* et à moyenne glissante.

3.2. Causalité.

DÉFINITION 3.6. Le filtre A est dit *causal* (ou *réalisable*) lorsque pour tout signal d'entrée x ,

$$x|_{]-\infty, 0[} \implies Ax|_{]-\infty, 0[} = 0.$$

PROPOSITION 3.7. Soit A un filtre défini par une convolution:

$$Ax = h * x,$$

avec $h \in \mathcal{S}'$ et $\hat{h} \in \mathcal{P}$ ou $h \in L^1$. Alors

$$A \text{ est causal} \iff h|_{]-\infty, 0[} = 0.$$

DÉMONSTRATION. On suppose pour fixer les idées que $h \in L^1$ et que A est un filtre de L^∞ dans lui-même. La démonstration pour un filtre avec $h \in \mathcal{S}'$, $\hat{h} \in \mathcal{P}$ est similaire, à quelques détails techniques prêt.

Supposons d'abord $h(t) = 0$ pour presque tout $t < 0$. Soit $x \in L^\infty$ tel que $x|_{]-\infty, 0[} = 0$. Alors

$$Ax(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)x(s)ds.$$

Soit $t < 0$ et $s \in \mathbb{R}$. Puisque $t = t - s + s < 0$, on a ou bien $s < 0$, ou bien $t - s < 0$. Puisque $x(\sigma) = 0$ et $h(\sigma) = 0$ presque pour tout $\sigma < 0$, on en déduit $h(t-s)x(s) = 0$ presque pour tout $s \in \mathbb{R}$ ce qui montre $Ax(t) = 0$. On a bien montré que A était causal.

On suppose maintenant que A est causal. En particulier, $h_1(t) = 0$ presque pour tout $t < 0$. On en déduit

$$\forall t < 0, \int_{-\infty}^t h(s)ds = 0,$$

ce qui implique de manière classique que h est nulle pour presque tout $t < 0$. \square

4. Filtres passe-bas

On appelle filtre passe-bas un filtre dont la fonction de transfert H laisse stable les basses fréquences, mais diminue les hautes fréquences:

$$H(0) = 1 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} H(\lambda) = 0.$$

Les filtres passe-bas sont notamment utiles lorsque l'on séquence des signaux. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, le séquençage fonctionne bien lorsque le signal est localisé en fréquence, d'où l'intérêt de tronquer les hautes fréquences du signal séquencé.

Le *Filtre passe-bas idéal* est donné par la fonction de transfert:

$$H(\lambda) = \mathbb{1}_{[-\lambda_c, \lambda_c]}(\lambda).$$

On montrera en travaux dirigés que ce filtre n'est pas réalisable, et qu'il ne rentre pas dans le cadre précédent développé dans le reste de ce chapitre: la réponse impulsionnelle h peut être définie, mais n'est ni dans L^1 , ni à transformée de Fourier dans \mathcal{P} .

On peut imaginer construire des filtres passe-bas avec des fonctions de transfert à support compact (comme la fonction indicatrice) mais régulières. Ceci ne règle pas le problème de la causalité:

EXERCICE 4.1. Soit $H \in L^\infty$ à support compact. Soit A le filtre $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ de fonction de transfert H :

$$\widehat{Ax}(\lambda) = H(\lambda)\hat{x}(\lambda).$$

Montrer que A n'est pas causal. On pourra vérifier que la fonction de transfert h est développable en séries entières.

Un filtre passe-bas causal ne peut donc pas tronquer totalement les hautes fréquences. Il existe toutefois des filtres passe-bas qui diminuent les basses fréquences, sans les tronquer totalement, tout en respectant la causalité. Parmi ces filtres, signalons les *filtres de Butterworth*:

DÉFINITION 4.2. Un *filtre de Butterworth* est un filtre causal, stable, dont la fonction de transfert vérifie:

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n}}.$$

L'entier $n \geq 1$ est l'ordre du filtre. La fréquence λ_c est la fréquence de coupure.

EXERCICE 4.3. Vérifier que le filtre *RC* est un filtre de Butterworth d'ordre 1.

Nous verrons en TD un filtre de Butterworth d'ordre 2, le filtre *RLC*.

EXERCICE 4.4. Vérifier que le filtre à moyenne glissante est bien un filtre passe bas.

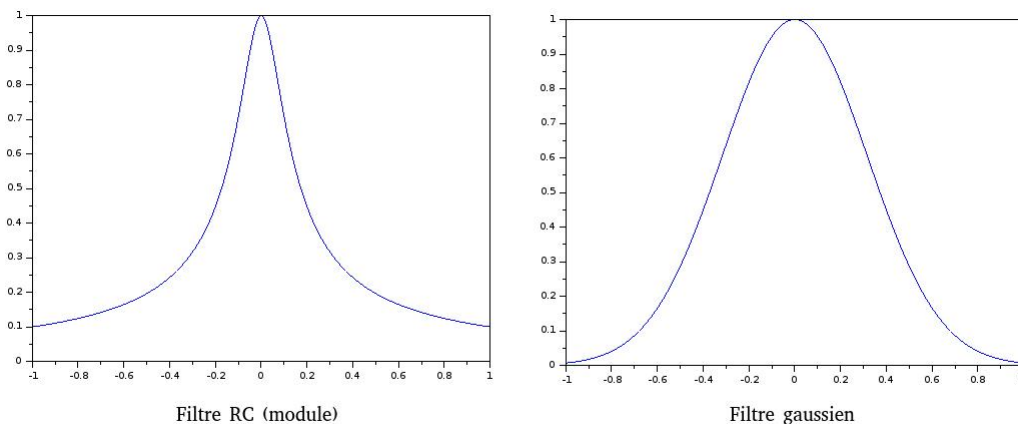
Un autre exemple important de filtre passe-bas est le filtre gaussien, donné par

$$(25) \quad H(\lambda) = e^{-c\lambda^2}.$$

EXERCICE 4.5. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre gaussien dont la fonction de transfert est donnée par (25).

Le filtre gaussien n'est pas causal. Il peut toutefois être employé en traitement des images, où la variable n'est plus une variable de temps, mais d'espace, et la causalité n'a donc pas d'importance.

FIGURE 2. Fonctions de transferts de deux filtres passe-bas



5. Filtres différentiels

On considère ici des filtres définis par une équation différentielle linéaire

$$(26) \quad Q \left(\frac{d}{dt} \right) y = P \left(\frac{d}{dt} \right) x.$$

Ici, x est le signal d'entrée et y le signal de sortie et P et Q sont des polynômes:

$$P(\tau) = \sum_{k=0}^p a_k \tau^k, \quad Q(\tau) = \sum_{k=0}^q b_k \tau^k,$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Par définition,

$$P \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{k=0}^p a_k \left(\frac{d}{dt} \right)^k, \quad Q \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{k=0}^q b_k \left(\frac{d}{dt} \right)^k.$$

Nous aborderons ce problème avec *deux points de vue différents*. En §5.2, nous allons construire un filtre rentrant dans le cadre du premier cas de la proposition 2.1, c'est à dire défini par une convolution $h \in \mathcal{S}'$ avec $\hat{h} \in \mathcal{P}$. Un tel filtre est continu de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' . Nous verrons aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit causal et/ou stable.

En §5.3 nous allons construire, sans hypothèse particulière sur P et Q , un filtre nécessairement causal. Ce filtre sera toujours défini par une convolution par une fonction h mais ne rentrera pas nécessairement dans le cadre des sous-sections précédentes: il ne sera par exemple pas toujours défini sur \mathcal{S} . Nous verrons que dans certains cas, les deux constructions ne coïncident pas.

Nous commençons par donner, en §5.1, des transformées de Fourier de fonctions rationnelles.

5.1. Transformation de Fourier des fonctions rationnelles. Soit $F(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}$ une fonction rationnelle, où p et q sont des fonctions polynômes. On cherche à déterminer la transformée de Fourier inverse¹

$$f = \overline{\mathcal{F}}(F).$$

On remarque

$$F \in \mathcal{S}' \iff \frac{p}{q} \text{ n'a pas de pôle réel.}$$

Nous nous limiterons donc à ce cas dans la suite. On commence par décomposer la fonction rationnelle F en éléments simples:

$$F(\lambda) = p_1(\lambda) + \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{1 \leq k \leq r_j} \frac{c_{j,k}}{(\lambda - z_j)^k},$$

où p_1 est un polynôme (nul si $d^o p < d^o q$, de degré $d^o p - d^o q$ sinon), les z_j sont les pôles de la fonction rationnelle p/q et r_j est l'ordre du pôle z_j . On s'est ramené à calculer les transformées de Fourier inverses des fonctions monômes $\lambda \mapsto \lambda^k$ et des fonctions rationnelles simples: $\lambda \mapsto \frac{1}{(\lambda - z)^k}$, $z \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire non nulle. Ces transformations de Fourier inverses sont données dans le tableau suivant. On rappelle que $u(t)$ désigne l'échelon unité de Heaviside: $u(t) = \mathbb{1}_{[0, +\infty)}$.

¹Le problème de la détermination de la transformée de Fourier directe est évidemment équivalent, mais nous aurons précisément besoin de la transformée de Fourier inverse dans la suite et préférons donner directement les formules pour cette transformation

| $F(\lambda)$ | $\overline{\mathcal{F}}(F)(t)$ | condition |
|---------------------------|---|---------------------------------------|
| λ^k | $\frac{1}{(2i\pi)^k} \delta_0^{(k)}$ | $k \in \mathbb{N}$ |
| $\frac{1}{(\lambda-z)^k}$ | $\frac{(2i\pi)^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{2i\pi z t} u(t)$ | $\text{Im} z > 0, k \in \mathbb{N}^*$ |
| $\frac{1}{(\lambda-z)^k}$ | $-\frac{(2i\pi)^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{2i\pi z t} u(-t)$ | $\text{Im} z < 0, k \in \mathbb{N}^*$ |

EXERCICE 5.1. Vérifier les formules précédentes. On commencera pour cela par calculer la transformation de Fourier de δ_0 et de $t \mapsto 2i\pi u(t)e^{2i\pi z t}$. On en déduira le cas général en utilisant les formules donnant la dérivée et le conjugué complexe de la transformée de Fourier d'une distribution.

5.2. Filtres différentiels et transformation de Fourier. On montre ici:

THÉORÈME 5.2. Soit P et Q deux polynômes non nuls. On suppose que Q n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire pur. Alors pour tout $x \in \mathcal{S}$ (respectivement \mathcal{S}'), il existe un unique $y \in \mathcal{S}$ (respectivement \mathcal{S}') solution de (26). L'application $A : x \mapsto y$ ainsi obtenu est un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' , de fonction de transfert

$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)}.$$

DÉMONSTRATION. Soit x et y des éléments de \mathcal{S}' . En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle (26), et en utilisant la formule

$$\mathcal{F} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^k f \right) = (2i\pi\lambda)^k \hat{f},$$

on voit que (26) est équivalente à

$$(27) \quad P(2i\pi\lambda)\hat{x} = Q(2i\pi\lambda)\hat{y}.$$

Puisque Q n'a pas de pôle imaginaire pure, la fonction $\lambda \mapsto 1/Q(2i\pi\lambda)$ est un élément de \mathcal{P} . En multipliant (27) par cette fonction, on obtient que (26) est équivalent à:

$$(28) \quad \hat{y} = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \hat{x}.$$

Soit

$$(29) \quad H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)}.$$

On vérifie facilement que H est un élément de \mathcal{P} , et donc (comme vu au début de ce chapitre) que (28) définit un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' , de fonction de transfert H et de réponse impulsionnelle

$$h = \overline{\mathcal{F}}(H).$$

□

EXEMPLE 5.3. Considérons le filtre dérivateur $y = x'$. Ici

$$P(\tau) = \tau, \quad Q(\tau) = 1.$$

Le polynôme Q n'a pas de zéro, donc P/Q n'a pas de pôle, et on a:

$$\hat{y}(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \hat{x}(\lambda) = 2i\pi\lambda \hat{x}(\lambda), \text{ i.e. } H(\lambda) = 2i\pi\lambda.$$

D'autres exemples sont donnés après le théorème 5.4.

THÉORÈME 5.4. *Supposons que Q n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire pur. Soit A le filtre de fonction de transfert (29). Alors:*

- (1) *A est causal si et seulement si les pôles de P/Q sont tous de partie réelle strictement négative.*
- (2) *A est stable si et seulement si $d^\circ P \leq d^\circ Q$.*

DÉMONSTRATION. *Preuve de (1).*

Soit $h = \overline{F}H$ la réponse impulsionnelle du filtre A . Alors A est causal si et seulement si $h_{] -\infty, 0[} = 0$ (cf §3.2). En effectuant la décomposition en éléments simples de H et en revenant au tableau des transformations de Fourier de §5.1, on voit que cette condition est équivalente à ce que H n'a pas de pôle de partie imaginaire strictement négative. Puisque

$$z \text{ pôle de } H \iff 2i\pi z \text{ pôle de } \frac{P}{Q},$$

on en déduit que A est causal si et seulement si les pôles de P/Q sont de parties réelles strictement négatives (rappelons que P/Q n'a pas de pôle de partie réelle nulle par hypothèse).

Preuve de (2).

Supposons $d^\circ P \leq d^\circ Q$. On effectue la décomposition en éléments simples de H . On obtient

$$H(\lambda) = c_0 + \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{1 \leq k \leq r_j} \frac{c_{j,k}}{(\lambda - z_j)^k},$$

où les z_j sont les pôles de H , r_j est l'ordre du pôle z_j et $c_0, c_{j,k} \in \mathbb{C}$, avec $c_{j,r_j} \neq 0$. On voit alors par le tableau des transformations de Fourier inverse de fonctions rationnelles (§5.1) que $h(t)$ est la somme de $c_0\delta_0$ et de fonctions qui sont dans L^1 . Par §3.1, A est stable.

Réciproquement, supposons $d^\circ P > d^\circ Q$. Cette fois, la décomposition en élément simple de H contient un polynôme non constant, de degré $d = d^\circ P - d^\circ Q$. On a donc

$$h = \sum_{j=0}^d c_j \delta^{(j)} + h_0,$$

où $h_0 \in L^1$ et $c_d \neq 0$. La réponse indicielle du filtre est

$$Au = \sum_{j=0}^d c_j u^{(j)} + h_0 * u = c_0 u + h_0 * u + \sum_{j=1}^d c_j \delta^{(j-1)},$$

qui n'est pas un élément de L^∞ puisque $c_d \neq 0$. On a bien montré l'équivalence demandée. \square

EXEMPLES 5.5. Pour le filtre dérivateur, $P(\tau) = \tau$, $Q(\tau) = 1$ et on retrouve bien que ce filtre est causal, mais pas stable puisque $d^\circ P > d^\circ Q$.

Considérons le filtre RC donné par l'équation différentielle $RCy' + y = x$. On a donc

$$Q(\tau) = RC\tau + 1, \quad P(\tau) = 1.$$

Le seul zéro de Q et seul pôle de P/Q est $-\frac{1}{RC}$, qui est de partie réelle négative. On retrouve que l'on peut définir un filtre $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ qui est causal et

stable ($d^o Q = 1 > d^o P = 0$). On vérifie également, en utilisant les formules de transformation de Fourier des fonctions rationnelles, la formule (23).

EXEMPLE 5.6. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(30) \quad y'' - \omega^2 y = x,$$

où $\omega > 0$. Cette équation différentielle rentre dans le cadre précédent avec

$$Q(\tau) = \tau^2 - \omega^2, \quad P(\tau) = 1.$$

Q a deux pôles, ω et $-\omega$, et donc aucun pôle imaginaire pur. L'équation (30) définit un filtre, de fonction de transfert

$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} = -\frac{1}{(2\pi\lambda)^2 + \omega^2}.$$

Le filtre obtenu est stable, mais pas causal.

Pour calculer la réponse impulsionnelle h , on décompose H en éléments simples. On trouve:

$$H(\lambda) = \frac{1}{4\pi\omega} \left(\frac{i}{\lambda - \frac{i\omega}{2\pi}} - \frac{i}{\lambda + \frac{i\omega}{2\pi}} \right),$$

et donc (en utilisant le tableau de §5.1):

$$h(t) = -\frac{1}{2\omega} (e^{-\omega t} u(t) + e^{\omega t} u(-t)).$$

En d'autres termes,

$$y(t) = -\frac{1}{2\omega} \left(\int_{-\infty}^t e^{(s-t)\omega} x(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{(t-s)\omega} x(s) ds \right).$$

Nous verrons dans la partie suivante comment définir un autre filtre, causal, mais pas stable, à partir de l'équation différentielle (30).

EXERCICE 5.7. Vérifier les calculs de l'exemple précédent.

EXEMPLE 5.8. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = x.$$

On a cette fois

$$Q(\tau) = \tau^2 + \omega^2, \quad P(\tau) = 1,$$

où $\omega > 0$. Le polynôme Q a deux zéros imaginaires pures, $\pm i\omega$. On ne rentre pas dans le cadre du théorème 5.2. Cette équation ne permet pas de définir un filtre $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Nous verrons en revanche en travaux dirigés (feuille 3) comment définir un filtre causal à partir de la même équation différentielle.

EXERCICE 5.9. Soit l'équation différentielle

$$y' - \omega y = x,$$

où $\omega \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$. Montrer que cette équation différentielle vérifie les hypothèses du théorème 5.2. Déterminer la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle du filtre ainsi étudié. Etudier sa causalité et sa stabilité selon les valeurs de ω .

5.3. Filtres différentiels et causalité. On considère encore l'équation (26), que l'on va résoudre cette fois en utilisant la théorie classique des équations différentielles. On rappelle que si M est une matrice complexe $q \times q$, son exponentielle est définie par

$$e^M = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} M^k.$$

La série converge normalement sur tout compact de l'espace vectoriel des matrices $q \times q$. De plus:

$$\forall t, s, \quad e^{tM} e^{sM} = e^{(t+s)M}.$$

La fonction

$$t \mapsto e^{tM}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} (e^{tM}) = M e^{tM}.$$

Si $Y_0 \in \mathbb{C}^q$ et $X \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^q)$, la solution de l'équation différentielle

$$Y'(t) - MY(t) = X(t), \quad Y(t_0) = Y_0$$

est donnée par la *formule de Duhamel*:

$$(31) \quad Y(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)M} X(s) ds + e^{(t-t_0)M} Y_0.$$

En pratique, on peut utiliser la fameuse méthode *de variation de la constante* pour expliciter (31).

On va construire un filtre *causal* à partir de (26). Plus précisément:

THÉORÈME 5.10. *Soit $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x|_{(-\infty, t_0)} = 0$. Il existe une unique fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $y|_{(-\infty, t_0)} = 0$ et vérifiant l'équation différentielle (26). L'application $x \mapsto y$ ainsi définie est un filtre de C_+^∞ dans C_+^∞ , où C_+^∞ est l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur \mathbb{R} tel que x est nulle sur $]-\infty, t_0]$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Il conviendrait de préciser l'affirmation " $x \mapsto y$ est un filtre", en mettant une topologie sur C_+^∞ , pour préciser ce que l'on entend par la continuité de cette application. Ce sera fait à la fin de la preuve du théorème.

PREUVE DU THÉORÈME. La démonstration du théorème est importante, puisqu'elle donne aussi la construction du filtre causal. On commence par ramener l'équation différentielle scalaire (26), d'ordre $q = d^\circ Q$, à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1. On pose pour cela

$$Y(t) = {}^T \left(y^{(j)}(t) \right)_{0 \leq j \leq q-1}, \quad X(t) = {}^T \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{q-1}, b_q^{-1} P \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) \right),$$

en notant $Q(\tau) = \sum_{k=0}^q b_k \tau^k$, et où T désigne la transposée. Les vecteurs $X(t)$ et $Y(t)$ sont donc des vecteurs colonnes de taille q . L'équation (26) est équivalente à

$$(32) \quad Y' = MY + X,$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{b_0}{b_q} & -\frac{b_1}{b_q} & \cdots & \cdots & -\frac{b_{q-1}}{b_q} \end{pmatrix}.$$

Par la formule de Duhamel (31), en rappelant que par hypothèse $X_{\uparrow(-\infty, t_0]} = 0$, on obtient $Y(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)M} X(s) ds$, ce qu'on peut encore réécrire indépendamment de t_0

$$(33) \quad Y(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)M} X(s) ds.$$

La formule (33) donne une application $x \mapsto y$ en projetant sur la première coordonnée de Y . La fonction ainsi obtenue est bien solution de (26), et nulle pour $t \leq t_0$. Il reste à montrer que cette application est linéaire, invariante et continue. La linéarité et l'invariance ne posent aucun problème.

Nous donnons le sens suivant à la propriété de continuité: si $(x_k)_k$ est une suite de signaux d'entrées C^∞ sur \mathbb{R} , à support dans $[t_0, +\infty)$ (t_0 fixé) telle que pour tout compact K de \mathbb{R} ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} |x^{(n)}(t) - x_k^{(n)}(t)| = 0.$$

alors la suite des signaux de sorties correspondant $(y_k)_k$ converge de la même manière vers le signal de sortie y correspondant à x : pour tout compact K ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} |y^{(n)}(t) - y_k^{(n)}(t)| = 0.$$

On vérifie facilement cette propriété de continuité sur la formule (33). \square

En pratique, on utilise la formule (33) pour définir des filtres sur des espaces plus gros que C_+^∞ , mais dépendant de l'équation différentielle (26), et qui ne contiennent pas toujours \mathcal{S} . Donnons quelques exemples.

EXEMPLE 5.11. Considérons le filtre RC , défini par l'équation différentielle $RCy' + y = x$. Cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{RC}} y(t)) = x \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} x(t).$$

En intégrant, on obtient la formule

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{\frac{s-t}{RC}} x(s) ds.$$

On obtient la même formule qu'en résolvant l'équation à l'aide de la transformation de Fourier. Dans ce cas les méthodes des parties §5.2 et §5.3 donnent le même résultat.

EXEMPLE 5.12. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y' = x.$$

Cette équation, correspondant à $Q(\tau) = \tau$ et $P(\tau) = 1$, ne rentre pas dans le cadre du Théorème 5.2, et ne permet donc pas de définir un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . La formule (33) s'écrit dans ce cas

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds,$$

ce qui définit bien un filtre (par exemple de L^1 dans L^∞), appelé *filtre intégrateur*. Remarquons que ce filtre n'est pas stable.

EXERCICE 5.13. Donner la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle du filtre intégrateur précédent.

EXEMPLE 5.14. On considère l'équation

$$y' - \omega y = x,$$

avec $\omega > 0$ (le signe est donc l'opposé de celui apparaissant dans le filtre *RC*). Cette fois, la formule de Duhamel s'écrit:

$$(34) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\omega(t-s)} x(s) ds = (h * x)(t),$$

où

$$h(t) = \mathbb{1}_{[0, +\infty)} e^{\omega t}.$$

Ceci définit bien un filtre sur C_+^∞ , mais on ne peut cette fois pas prolonger ce filtre à L^1 ou à \mathcal{S} , à cause de la croissance du terme $e^{\omega(t-s)}$ quand $s \rightarrow -\infty$ dans l'intégrale. Pour la même raison ce filtre n'est bien sûr pas stable.

Remarquons que l'on peut aussi traiter cette équation par des méthodes de Fourier (ici $Q(\tau) = \tau - \omega$ n'a pas de racine imaginaire pure) et définir un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . On obtiendrait la formule (cf aussi exercice 5.9):

$$(35) \quad y(t) = - \int_t^{+\infty} e^{\omega(t-s)} x(s) ds.$$

Ceci donne un filtre de \mathcal{S} dans \mathcal{S} et de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' , de réponse impulsionnelle

$$h(t) = e^{\omega t} \mathbb{1}_{(-\infty, 0]},$$

stable et non causal. On voit ici que les deux filtres (34) et (35) obtenus à partir de la même équation différentielle correspondent à deux "conditions initiales" différentes. Pour le filtre (34), on suppose la sortie y nulle en $t = -\infty$ et pour le filtre (35) la même sortie est supposée nulle en $t = +\infty$.

EXERCICE 5.15. Déterminer un filtre causal d'entrée x dont la sortie y est solution de l'équation différentielle

$$y'' - \omega^2 y = x.$$

Comparer avec l'exemple 5.6

6. Appendice: compléments de preuves

La propriété suivante est laissée en exercice au lecteur:

EXERCICE 6.1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Soit $\varphi_k(x) = k\varphi(kx)$. Montrer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

DÉMONSTRATION PARTIELLE DU THÉORÈME 2.7. On commence par remarquer que si f et g sont des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$(36) \quad A(f * g) = (Af) * g.$$

Formellement (en notant $\tau_s f(t) = f(t - s)$):

$$A(f * g) = A \int \tau_s f g(s) ds = \int A(\tau_s f) g(s) ds = \int \tau_s (Af) g(s) ds = (Af) * g,$$

où on a utilisé successivement la linéarité (pour passer le A sous le signe intégral) et l'invariance (pour commuter τ_s et A). Le fait que A puisse passer sous le signe intégral reste néanmoins à justifier rigoureusement.

Donnons maintenant une démonstration rigoureuse de (36) pour le lecteur intéressé. Pour cela, on introduit l'adjoint de A . C'est l'application A^* , de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' , définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}', \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle A^* \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle.$$

On vérifie facilement que cela définit une application continue de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' , dont la restriction à \mathcal{S} est une application continue de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned} \int A(f * g)\varphi &= \int (f * g)A^*\varphi = \int \int f(s)g(t-s)(A^*\varphi)(t) ds dt \\ &= \int \int f(t-\sigma)g(\sigma)(A^*\varphi)(t) d\sigma dt \\ &= \int g(\sigma) \int f(t-\sigma)(A^*\varphi)(t) dt d\sigma = \int g(\sigma) \int \tau_\sigma f(t) A^*\varphi(t) dt d\sigma \\ &= \int g(\sigma) \int A(\tau_\sigma f)(t)\varphi(t) dt d\sigma = \int g(\sigma) \int \tau_\sigma (Af)(t)\varphi(t) dt d\sigma, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'invariance du filtre pour échanger A et τ_σ . On a donc:

$$\int A(f * g)\varphi = \int \varphi(t) \int g(\sigma)\tau_\sigma (Af)(t) d\sigma dt = \int \varphi(t)(Af) * g(t) dt,$$

ce qui donne exactement (36) pour $f, g \in \mathcal{S}$. Il reste à montrer que (36) est encore valable lorsque $f = \delta_0$ et $g \in \mathcal{S}$, ce qui donnerait directement (compte tenu du fait que δ_0 est l'élément neutre pour la convolution):

$$(37) \quad Ag = h * g, \quad g \in \mathcal{S},$$

où on a noté $h = A\delta_0$. On raisonne par densité. Soit $\{\varphi_k\}$ une suite d'éléments de \mathcal{S} qui converge vers δ_0 dans \mathcal{S}' . On peut prendre (cf exercice 6.1):

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

où $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\int \varphi = 1$. Premièrement, par (36), si $g \in \mathcal{S}$:

$$A(\varphi_k * g) = (A\varphi_k) * g.$$

Deuxièmement, par continuité de la convolution et l'exercice 6.1,

$$\lim_k \varphi_k * g = \delta_0 * g = g \text{ dans } \mathcal{S}',$$

puis par continuité de $A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$,

$$\lim_k A(\varphi_k * g) = Ag.$$

Troisièmement, en utilisant la continuité de A puis de la convolution dans \mathcal{S}' :

$$\lim_k (A\varphi_k) * g = h * g.$$

En combinant ces trois points, on obtient (37).

On a donc

$$\forall g \in \mathcal{S}, \quad \widehat{Ag} = \hat{h}\hat{g}.$$

Puisque A est continue de \mathcal{S} dans \mathcal{S} , on en déduit immédiatement que la multiplication par \hat{h} est une application continue de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . On admet que ceci implique $\hat{h} \in \mathcal{P}$.

Par un argument simple de densité (on rappelle que \mathcal{S} est dense dans \mathcal{S}' pour la topologie de \mathcal{S}'):

$$Ag = h * g, \quad g \in \mathcal{S}',$$

ce qui conclut la preuve. \square

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.11. Pour obtenir le résultat dans le cas général $\hat{h} \in \mathcal{S}'$, on approche h par une suite d'éléments de \mathcal{S} . Comme dans la démonstration précédente, on se donne $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\int \varphi = 1$ et on pose $\varphi_k(t) = k\varphi(kt)$. On a

$$(38) \quad \widehat{\varphi_k}(\lambda) = \hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

Par (24), appliqué à $\varphi_k * h$,

$$e_\mu * \varphi_k * h = \hat{\varphi}\left(\frac{\mu}{k}\right) \hat{h}(\mu) e_\mu.$$

Par l'exercice 6.1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{S}',$$

et donc, μ étant fixé,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_\mu * \varphi_k * h = e_\mu * \delta_0 * h = e_\mu * h \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

De même on montre facilement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\varphi}\left(\frac{\mu}{k}\right) \hat{h}(\mu) e_\mu = \hat{\varphi}(0) \hat{h}(\mu) e_\mu = \hat{h}(\mu) e_\mu \text{ dans } \mathcal{S}',$$

(on a utilisé $\hat{\varphi}(0) = \int \varphi = 1$), ce qui conclut la preuve. \square

Filtres discrets

Ce chapitre est une brève introduction aux filtres discrets. Comme dans le cas des filtres analogiques, nous introduirons la réponse impulsionnelle h et montrerons que dans de nombreux cas le signal de sortie du filtre est simplement la convolée de h et du signal d'entrée. Nous introduirons la transformée en z d'un signal discret, qui permet notamment de définir la fonction de transfert d'un filtre discret. Ce chapitre a une importance pratique évidente: lorsque l'on fait des calculs informatiques, tous les objets considérés (signaux et systèmes) sont discrets.

1. Définitions. Réponse impulsionnelle

1.1. Notations. On rappelle qu'un signal discret est une suite complexe indexée par \mathbb{Z} , c'est à dire un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On munit $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de la topologie de la convergence simple: la suite x^N de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ converge vers $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} x_n^N = x_n,$$

où $x^N = (x_n^N)_{n \in \mathbb{Z}}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ formé des *suites finies*, i.e. telles qu'il existe $N \geq 0$ tel que $x_n = 0$ pour $|n| \geq N$. Pour $p \in [1, \infty)$ et $x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, on note

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|.$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$, on note ℓ^p le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ formé des x tel que $\|x\|_{\ell^p}$ est fini. On rappelle que $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ est un espace de Banach.

On note τ le décalage à gauche, τ^{-1} le décalage à droite:

$$\tau((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \tau^{-1}((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

On note $\delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ l'impulsion unité:

$$\delta_0 = 1, \quad \forall n \neq 0, \delta_n = 0.$$

Les signaux discrets apparaissent notamment en pratique lors de l'échantillonnage de signaux analogiques. Si $a > 0$ et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et un signal analogique supposé continu, on rappelle que son échantillonné de période a est

$$(39) \quad a \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(na) \delta_{na},$$

ce qui définit un signal discret $(x(na))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui dépend de x et de la période d'échantillonnage a . Ce point de vue est privilégié dans le livre de Gasquet et Witomski, ¹

¹*Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes.* Sciences Sup. Dunod, 2004.

où un signal discret est défini non pas comme une suite indexée par \mathbb{Z} , mais comme une distribution de la forme $\sum_n x_n \delta_{na}$.

1.2. Définition.

DÉFINITION 1.1. Soit \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, munis chacun d'une topologie plus fine que celle de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et invariants par décalage à gauche et à droite. On dit que l'application A de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} est *invariante* quand A et τ commutent. Un filtre A de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} est une application continue, linéaire et invariante de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} .

L'expression "topologie plus fine" signifie que la convergence d'une suite dans \mathcal{X} (ou dans \mathcal{Y}) implique la convergence simple de la même suite (puisque $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est muni de la topologie de la convergence simple).

Nous ferons dans tout ce chapitre une hypothèse supplémentaire utile: nous ne considérerons que des filtres tels que $\delta \in \mathcal{X}$. Par invariance et stabilité de \mathcal{X} par combinaison linéaire, cela implique immédiatement que l'espace vectoriel des suites finies E est inclus dans \mathcal{X} .

EXEMPLES 1.2. Donnons trois exemples (en notant à chaque fois $(x_k)_k$ l'entrée et $(y_k)_k$ la sortie): le filtre à retard, $y_k = x_{k-a}$ ($a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$); le filtre à moyenne glissante, $y_k = \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^k x_j$ (où N est un entier positif non nul) et le filtre $y_k = x_k - x_{k-1}$.

Dans le cadre de l'échantillonnage des signaux analogiques on est amené à approcher des filtres analogiques par des filtres discrets. Donnons l'exemple du filtre RC , défini par l'équation différentielle:

$$RCy' + y = x.$$

On échantillonne l'entrée et la sortie avec une période a : $y_n = y(na)$, $x_n = x(na)$. Pour approcher $y'(na)$, on utilise la définition de la dérivée:

$$y'(ka) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(ka) - y(ka - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Lorsque a est très petit, on peut approcher la limite précédente par la valeur en $\varepsilon = a$, soit

$$y'(ka) \approx \frac{y(ka) - y((k-1)a)}{a},$$

ce qui donne le filtre discret défini par

$$\frac{RC}{a}(y_k - y_{k-1}) + y_k = x_k,$$

soit

$$(40) \quad y_k - by_{k-1} = cx_k,$$

avec $b = \frac{1}{\frac{a}{RC} + 1}$, $c = \frac{1}{1 + \frac{RC}{a}}$. Une telle équation est appelée *équation aux différences linéaires à coefficients constants*. C'est une classe importante de filtre discret, analogues discrets des filtres analogiques définis par des équations différentielles.

Pour déduire de (40) la sortie $(y_k)_k$, il faut fixer une condition initiale, ou une condition aux limites. Nous le ferons plus loin lorsque nous discuterons la causalité des filtres discrets.

1.3. Réponse impulsionnelle.

DÉFINITION 1.3. La *réponse impulsionnelle* d'un filtre A est la suite $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par $h = A\delta$.

On rappelle la définition de la convolée $u * v$ de deux suite $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$:

$$(u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k.$$

PROPOSITION 1.4. Soit A un filtre de réponse impulsionnelle h . Alors pour toute suite finie $x \in E$,

$$Ax = h * x.$$

DÉMONSTRATION. Notons δ^k la suite définie par $\delta^k = \tau^{-k}\delta$, où

$$\tau^{-k} := \underbrace{\tau^{-1} \circ \dots \circ \tau^{-1}}_{k \text{ fois}},$$

τ_{-1} étant le décalage à droite. On a donc

$$\delta_k^k = 1, \quad \delta_n^k = 0 \text{ si } n \neq k.$$

Une suite finie $x = (x_n)_n$ s'écrit

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta^k,$$

où la somme est en fait finie. On a donc

$$Ax = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k A\delta^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k A(\tau^{-k}\delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \tau^{-k}h,$$

où on a utilisé que A était invariant. Ceci signifie exactement

$$Ax = x * h.$$

□

Il est tentant d'étendre la formule $Ax = x * h$ à tous les signaux d'entrée $x \in \mathcal{X}$. Cette formule n'est pas toujours valable, ce qui nécessite l'introduction d'une nouvelle définition:

DÉFINITION 1.5. Soit A un filtre discret de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} de réponse impulsionnelle $h = (h_k)_k$. On dit que A est un *filtre de convolution* quand pour tout $x = (x_k)_k$ de \mathcal{X} ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (Ax)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} h_k x_{n-k}.$$

EXERCICE 1.6. Déterminer les réponses impulsionnelles du filtre $y_k = x_k - x_{k-1}$, du filtre à retard $y_k = x_{k-1}$ et du filtre à moyenne glissante. Vérifier que ces filtres sont des filtres de convolution.

EXEMPLE 1.7. Soit $h \in \ell^1$. Alors $x \mapsto h * x$ définit un filtre de convolution de ℓ^∞ dans lui-même (cf §2.2).

EXERCICE 1.8. Soit $h \in E$ (l'espace vectoriel des suites finies). Vérifier que $x \mapsto h * x$ définit un filtre de convolution de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (muni de la convergence simple) dans lui-même.

Moyennant une propriété de densité de E dans \mathcal{X} , tout filtre A défini sur \mathcal{X} est un filtre de convolution:

PROPOSITION 1.9. *Soit A un filtre discret de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . On suppose que pour tout $x = (x_k)_k \in \mathcal{X}$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x_k \delta^k = x \text{ dans } \mathcal{X}.$$

Alors A est un filtre de convolution.

COROLLAIRE 1.10. *Soit A un filtre discret de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . On suppose que $\mathcal{X} = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{X} = \ell_0^\infty$ (le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ formé des suites qui tendent vers 0), ou $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, muni de la topologie de la convergence simple. Alors A est un filtre de convolution.*

Pour montrer le corollaire, il suffit de vérifier que la propriété

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x_k \delta^k = x \text{ dans } \mathcal{X}$$

est vraie pour les espaces \mathcal{X} considérés. Cette vérification est laissée au lecteur. Remarquons que cette propriété est fautive pour ℓ^∞ . De fait, on peut construire des filtres sur ℓ^∞ qui ne sont pas des filtres de convolution.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.9. Par continuité de A

$$(41) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} A \left(\sum_{-N \leq k \leq N} x_k \delta^k \right) = y \text{ dans } Y,$$

où $y = Ax = (y_n)_n$ est le signal de sortie. Or

$$A \left(\sum_{-N \leq k \leq N} x_k \delta^k \right) = \sum_{-N \leq k \leq N} x_k \tau^{-k} h.$$

La topologie de \mathcal{Y} est plus fine que la topologie de la convergence simple. La convergence (41) implique donc la convergence de chacune des coordonnées de la suite précédente. En d'autres termes:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} x_k h_{n-k} = y_n,$$

ce qui montre le résultat annoncé. \square

2. Propriété des filtres de convolution

On s'intéresse ici à deux propriétés importantes des filtres discrets: la causalité et la stabilité. Nous verrons que comme dans le cas des filtres analogiques, ces propriétés peuvent être caractérisées par des propriétés de la réponse impulsionnelle h .

2.1. Causalité. Un filtre discret A est dit *causal* si

$$\forall n \leq 0, \quad x_n = 0 \implies \forall n \leq 0, \quad y_n = 0.$$

EXERCICE 2.1. Montrer que les filtres de l'exemple 1.2 sont causaux. Donner l'exemple d'un filtre non causal.

PROPOSITION 2.2. Soit $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un filtre de convolution, de réponse impulsionnelle $h = (h_n)_n$. Alors A est causal si et seulement si:

$$\forall n \leq -1, \quad h_n = 0.$$

EXERCICE 2.3. Prouver la proposition 2.2.

L'exemple du circuit RC discrétisé, donné par l'équation(40): $y_k - by_{k-1} = cx_k$ (où $b, c \in]0, 1[$), sera considéré dans l'exercice 4 du TD 4.

2.2. Stabilité.

DÉFINITION 2.4. Le filtre discret $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est *stable* quand il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \ell^\infty \cap \mathcal{X}, \quad Ax \in \ell^\infty \text{ et } \|Ax\|_{\ell^\infty} \leq C\|x\|_{\ell^\infty}.$$

PROPOSITION 2.5. Soit $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un filtre de convolution et h sa réponse impulsionnelle. Alors

$$A \text{ est stable} \iff h \in \ell^1.$$

DÉMONSTRATION. Supposons $h \in \ell^1$. Soit $x \in \ell^\infty \cap \mathcal{X}$ et $y = Ax$. Alors, pour tout n de \mathbb{Z} ,

$$|y_n| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} h_k \right| \leq \left(\sup_{p \in \mathbb{Z}} |x_p| \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| = \|x\|_{\ell^\infty} \|h\|_{\ell^1}.$$

Supposons réciproquement que A est stable. Pour $N \geq 1$, on considère $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$x_n = \begin{cases} \overline{h_{-n}}/|h_{-n}| & \text{si } h_{-n} \neq 0 \text{ et } |n| \leq N \\ 0 & \text{si } h_{-n} = 0 \text{ ou } |n| > N, \end{cases}$$

où $\overline{h_{-n}}$ est le conjugué complexe de h_{-n} . Alors $x \in \ell^\infty$ et $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$. De plus, en notant $y = Ax$, on a:

$$y_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{-k} h_k = \sum_{-N \leq k \leq N} |h_k|.$$

La propriété de stabilité montre que $|y_0| \leq C$ pour une constante $C > 0$ indépendante de N , et donc

$$\forall N, \quad \sum_{-N \leq k \leq N} |h_k| \leq C.$$

On a donc bien $h \in \ell^1$. □

EXERCICE 2.6. Montrer que les filtres de l'exemple 1.2 sont stables. Donner l'exemple d'un filtre discret non stable.

3. Réponse en fréquence, transformée en z

Soit $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un filtre discret, $z \in \mathbb{C}$. On suppose $\zeta = (z^n)_n \in \mathcal{X}$. Par une démonstration proche de celle de la Proposition 2.9, on peut montrer qu'il existe $H(z) \in \mathbb{C}$ tel que

$$A\zeta = H(z)\zeta.$$

En particulier, en notant e_λ la suite

$$e_\lambda = (e^{2in\pi\lambda})_{n \in \mathbb{Z}},$$

on a

$$Ae_\lambda = H(e^{2i\pi\lambda})e_\lambda.$$

La fonction $\lambda \rightarrow H(e^{2i\pi\lambda})$ est appelée *réponse en fréquence* du filtre discret A . Plus généralement, on définit la *fonction de transfert* de A comme étant la fonction

$$z \mapsto H(z).$$

Cette fonction est liée à la notion de *transformée en z* d'une suite:

DÉFINITION 3.1. Soit $x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. La transformée en z de x est la fonction X de z définie par la série de Laurent

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}.$$

Le lecteur prendra garde à ce que la transformée en z d'une suite n'est pas toujours définie. Il peut arriver que la série de Laurent en question ne converge jamais (par exemple si $x_n = e^{n^2}$). Lorsque $x \in \ell^1$, la série converge au moins sur le cercle $\{|z| = 1\}$. Dans les cas favorables, elle converge absolument sur une couronne: il existe $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad R_1 < |z| < R_2 \implies \sum |x_n| |z|^{-n} < \infty,$$

et la série diverge dès que $|z| > R_2$ ou $|z| < R_1$: voir le cours d'analyse complexe de 3ème année de licence pour un rappel sur les séries de Laurent.

EXERCICE 3.2. Soit α, β des nombres complexes non nuls et $x = (x_n)_n$ défini par

$$x_n = \begin{cases} \alpha^n & \text{si } n \geq 0 \\ \beta^n & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Montrer que la série de Laurent converge absolument pour $|\alpha| < |z| < |\beta|$ et que:

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha} + \frac{z}{\beta - z}.$$

EXEMPLE 3.3. Considérons comme dans la partie 3 du chapitre 2 l'échantillonné, avec une période $a > 0$, d'une fonction f :

$$af\Delta_a = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na)\delta_{na}.$$

Supposons pour fixer les idées $f \in \mathcal{S}$. Posons $x_n = f(na)$. Alors la transformée en z X de x_n converge pour $|z| = 1$. De plus, puisque $\widehat{\delta_{na}} = e^{-2i\pi na}$, la transformée de Fourier de l'échantillonné est

$$\widehat{af\Delta_a} = aX(e^{2i\pi na}).$$

La restriction de la transformée en z sur le cercle unité permet donc de retrouver la transformée de Fourier de l'échantillonné.

La transformée en z transforme la convolution en multiplication.

PROPOSITION 3.4. *Soit x et y éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, de transformées en z respectivement X et Y . Alors la transformée en z de $x * y$ converge sur l'intersection \mathcal{C} des couronnes de convergence de X et Y et est égale, sur \mathcal{C} , au produit XY des transformées en z de x et y .*

DÉMONSTRATION. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} = x * y$. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| |z|^{-n} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| |y_{n-k}| |z|^{-k} |z|^{k-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| |z|^{-k} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |y_p| |z|^{-p}.$$

Les deux séries apparaissant de le terme de droite de cette inégalité sont convergentes sur \mathcal{C} par définition de \mathcal{C} . On peut donc intervertir les sommes dans le calcul suivant de la transformée en z de $x * y$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} z^{-k} z^{k-n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^{-k} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_{n-k} z^{n-k} \right) = Y(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^{-k} = Y(z) X(z). \end{aligned}$$

□

On en déduit l'expression de la transformée en z de la sortie d'un filtre discret.

THÉORÈME 3.5. *Soit A un filtre de convolution de réponse impulsionnelle h et de fonction de transfert H . Alors H est la transformée en z de h .*

Considérons un signal d'entrée $x \in E$ (supposé fini). Notons X sa transformée en z et Y la transformée en z du signal de sortie correspondant. Alors on a, sur la couronne de convergence de H ,

$$Y(z) = H(z) X(z).$$

REMARQUE 3.6. Cette formule est analogue à la formule $\hat{y}(\lambda) = H(\lambda) \hat{x}(\lambda)$ vue pour les filtres analogiques.

DÉMONSTRATION. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\zeta = (z^n)_n$. On suppose $\zeta \in \mathcal{X}$. Alors

$$(h * \zeta)_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} h_k z^{n-k} = z^n \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} h_k z^{-k} = z^n \tilde{H}(z),$$

où \tilde{H} est la transformée en z de h . On a montré

$$H(z) \zeta = A \zeta = h * \zeta = \tilde{H}(z) \zeta,$$

et donc $H = \tilde{H}$.

Si $x \in E$, sa transformée en z est une somme finie, qui converge sur \mathbb{C} tout entier. On peut donc appliquer sans problème la proposition 3.4, qui donne la conclusion du théorème. □

EXERCICE 3.7. Calculer $H(z)$ pour les filtres des exemples 1.2.

Le lecteur intéressé est invité à lire le chapitre 40 du livre de Gasquet et Witomski pour plus de détails sur la transformation en z .

Transformation de Fourier à fenêtre glissante

1. Introduction

L'étude du spectre est un outil très efficace pour l'analyse des signaux temporels, mais présente des inconvénients importants lorsque le signal analysé varie de manière importante et irrégulière au cours du temps. Ainsi le début et la fin d'un signal localisé dans le temps et l'instant d'apparition d'un pic ou d'une singularité ne sont pas visibles directement sur son spectre. Par ailleurs le calcul de la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ est en pratique impossible, puisqu'il nécessite la connaissance de $x(t)$ pour tout réel t (et donc en particulier après l'instant du calcul de cette transformation de Fourier).

Pour pallier ce problème, on introduit des transformations permettant d'analyser un signal simultanément dans le domaine temporel (c'est à dire par rapport à une variable de temps t) et le domaine fréquentiel (par rapport à la variable λ après transformée de Fourier). C'est l'*analyse temps-fréquence*. Il s'agit typiquement d'introduire une transformation d'un signal $x(t)$ (dépendant d'une variable $t \in \mathbb{R}$) qui dépend de deux variables: une variable temporelle et une variable de fréquence λ .

On introduit dans ce chapitre la *transformation de Fourier à fenêtre glissante* (parfois appelée transformation de Fourier à court terme, TFCT, *short term Fourier transform* ou en abrégé STFT en anglais), un premier exemple d'analyse temps-fréquence. La théorie des *ondelettes*, abordée dans un cours de deuxième année de Master, parcours mathématiques des données, relève aussi de l'analyse temps-fréquence. L'*analyse micro-locale* est une autre version de l'analyse temps-fréquence, ne relevant pas à proprement parler du traitement du signal, mais cruciale dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires.

On s'intéresse dans ce chapitre à la version continue (analogique) de la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Cette transformation a également une version discrète, utile pour les applications, qui ne sera pas abordée ici.

2. Définition

Pour définir la (une) transformation de Fourier à fenêtre glissante, on fixe une fonction w , la *fenêtre*, définie sur \mathbb{R} et typiquement à support compact ou tendant vers 0 rapidement à l'infini, et on considère les fonctions F_b suivantes, dépendant d'un paramètre temporel $b \in \mathbb{R}$:

$$(42) \quad F_b(t) = f(t)\overline{w}(t - b).$$

La fonction F_b doit être vue comme une version localisée (autour du temps b) de la fonction f .

DÉFINITION 2.1. La *transformée à fenêtre glissante*, ou *transformée de Fourier à court terme* (TFCT) $W_f(\lambda, b)$ de $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour la fenêtre $w \in L^2(\mathbb{R})$, est donnée par

$$W_f(\lambda, b) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda t} f(t) \overline{w}(t-b) dt = \widehat{F}_b(\lambda), \quad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

où $\widehat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable t .

Remarquons que puisque w et f sont dans L^2 , la fonction F_b est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout b , et l'intégrale définissant W_f est absolument convergente.

Un candidat naturel de fenêtre est un créneau, fonction caractéristique d'un segment: $w = \mathbb{1}_{[-A, +A]}$. La TFCT correspondante pour une fonction f (dans \mathcal{S} pour fixer les idées) est alors

$$W_f(\lambda, b) = \hat{f} * \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-A-b, A-b]}).$$

Par la formule¹

$$(43) \quad \widehat{\tau_b \overline{w}}(\lambda) = e^{2i\pi\lambda b} \overline{\widehat{w}(-\lambda)},$$

on obtient

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-A-b, A-b]})(\lambda) = e^{2i\pi\lambda b} 2A \operatorname{sinc}(2A\lambda),$$

où sinc est la fonction Sinus Cardinal, définie p. 25. C'est une fonction qui s'amortit très lentement (elle n'est pas dans L^1), et a des oscillations assez importantes pour des fréquences de l'ordre de $1/A$. Elle n'est donc pas utilisée en pratique: on lui préfère des fenêtres plus régulières, dont la transformée de Fourier décroît plus vite à l'infini. Avant de donner quelques exemples, on montre comment retrouver le signal de départ à partir de sa TFCT.

3. Conservation de l'énergie. Formule de recouvrement

On remarque d'abord que la formule d'inversion de Fourier, utilisée à b fixée, permet immédiatement de récupérer la fonction localisée F_b à partir de $W_f(\lambda, b)$.

$$f(t) \overline{w}(t-b) = F_b(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\lambda t} W_f(\lambda, b) d\lambda.$$

On donne maintenant des formules permettant de recouvrir f à partir de $W_f(\lambda, b)$, $(\lambda, b) \in \mathbb{R}^2$. Ces formules sont dues à Dennis Gabor² qui les a introduites dans les années 1940 pour des fenêtres gaussiennes.

THÉORÈME 3.1. *Soit $w \in L^2$ tel que $\hat{w} \in L^1$. On suppose*

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$$

Alors (conservation de l'énergie)

$$(44) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad W_f \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

De plus (formule de reconstruction)

$$(45) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}), \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_f(\lambda, b) w(t-b) e^{2i\pi\lambda t} d\lambda db.$$

¹On rappelle la notation $\tau_b f(t) = f(t-b)$

²Ingénieur et physicien hongrois, prix Nobel de physique 1971 et pionnier du traitement du signal.

DÉMONSTRATION. *Conservation de l'énergie.* C'est une conséquence directe de la formule de Plancherel. Fixons d'abord $b \in \mathbb{R}$. Puisque $f \in L^2$ et $\tau_b w \in L^\infty$, la fonction F_b définie par (42) est un élément de $L^2(\mathbb{R})$. Par la formule de Plancherel, $\widehat{F}_b \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_b(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |F_b(t)|^2 dt,$$

ce qui s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} |W_f(\lambda, b)|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |w(t-b)|^2 dt.$$

En intégrant par rapport à b , et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |w(t-b)|^2 db dt.$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} |w(t-b)|^2 db = \|w\|_{L^2}^2 = 1$ par hypothèse, on obtient la formule (44).

Reconstruction. On suppose maintenant $f \in L^2$ et $\hat{f} \in L^1$. La fonction F_b est dans L^1 et

$$\widehat{F}_b = \hat{f} * \widehat{\tau_b w}.$$

Par la formule (43) et l'hypothèse $\widehat{w} \in L^1$, on a $\widehat{\tau_b w} \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction \widehat{F}_b est la convolée de deux fonctions L^1 , donc une fonction L^1 . On peut alors utiliser la formule d'inversion de Fourier:

$$f(t)\overline{w}(t-b) = F_b(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\lambda t} \widehat{F}_b(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\lambda t} W_f(\lambda, b) d\lambda.$$

En multipliant par $w(t-b)$ et en intégrant par rapport à b , on obtient

$$f(t) = f(t) \int_{\mathbb{R}} |w(t-b)|^2 db = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\lambda t} W_f(\lambda, b) d\lambda w(t-b) db,$$

ce qui termine la preuve de (45). \square

Pour simplifier la démonstration de la formule de reconstruction, on a fait des hypothèses assez restrictives sur f et w . Cette formule est valable dans un cadre plus général (voir par exemple Gasquet-Witonski, §41.3, pour des hypothèses différentes). Remarquons que les hypothèses sur w faites dans le théorème 3.1 sont vérifiées par tous les exemples de fenêtres qui suivent (mais pas par le créneau $\mathbb{1}_{[-A, +A]}$).

4. Fenêtres usuelles

On donne maintenant quelques exemples de fenêtres usuelles employées pour la transformation de Fourier à fenêtre glissante. On normalise à chaque fois ces fenêtres pour que la condition $\int |w|^2 = 1$ du théorème 3.1 soit respectée. Cette normalisation n'est pas universelle: les fenêtres définies avec une autre constante multiplicative portent bien sûr le même nom. Le paramètre a est un paramètre temporel. Dans les deux premiers exemples, a est choisi pour que la fenêtre soit à support dans $[-a, +a]$. Dans le troisième, la fenêtre devient négligeable pour des temps $t \gg a$.

Fenêtre triangulaire. Il s'agit d'un filtre à support compact, défini par

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > a \\ b(1 - t/a) & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ b(1 + t/a) & \text{si } -a \leq t \leq 0, \end{cases}$$

où

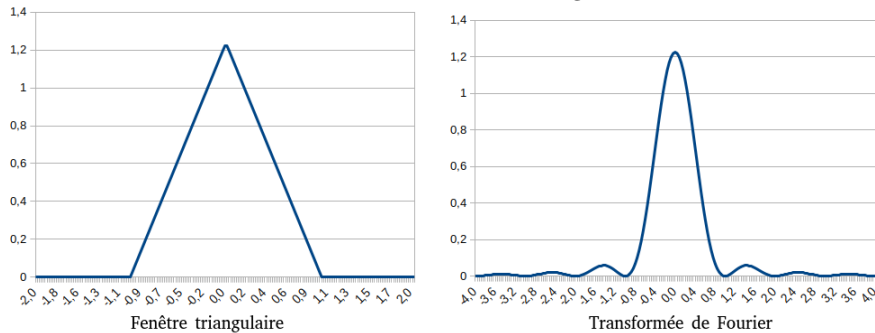
$$a > 0, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2a}}.$$

La transformation de Fourier de cette fenêtre est

$$\hat{w}(\lambda) = \sqrt{\frac{3a}{2}} \left(\frac{\sin(\pi\lambda a)}{\pi\lambda a} \right)^2 = \sqrt{\frac{3a}{2}} \operatorname{sinc}^2(\lambda a).$$

On a $\hat{w} \in L^1(\mathbb{R})$, contrairement à la fenêtre en créneau.

FIGURE 1. Fenêtre triangulaire



Fenêtre de Hann. Cette fenêtre, nommée en hommage à Julius Ferdinand von Hann, pionnier autrichien, de la météorologie est de la forme

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6a}} (1 + \cos(\frac{\pi t}{a})) & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

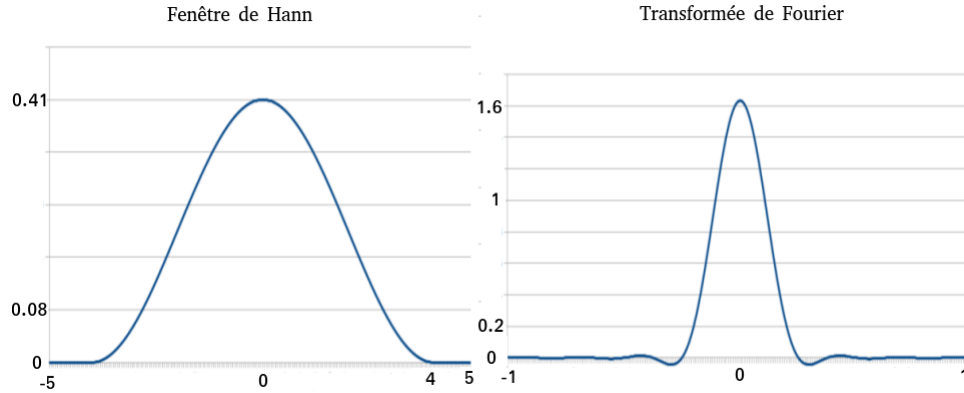
Sa transformée de Fourier est

$$\hat{w}(\lambda) = \frac{\sin(2\pi a\lambda)}{\pi\sqrt{6a}\lambda(1 - 4a^2\lambda^2)},$$

qui est une fonction C^∞ (les pôles en 0, $1/2a$ et $-1/2a$ sont artificiels, compensés par le fait que ces valeurs annulent aussi le numérateur). Là encore, on a $\hat{w} \in L^1(\mathbb{R})$. Remarquons que la décroissance de \hat{w} , en $1/\lambda^3$ quand $\lambda \rightarrow \infty$, est meilleure que pour la fenêtre triangulaire.

La fenêtre de Hann est parfois appelée fenêtre de Hanning. Elle fait partie d'une famille plus large de fenêtres trigonométriques, dont fait partie notamment la fenêtre de Hamming (cf Gasquet-Witonski), autre fenêtre d'usage courant.

FIGURE 2. Hann et sa transformée de Fourier



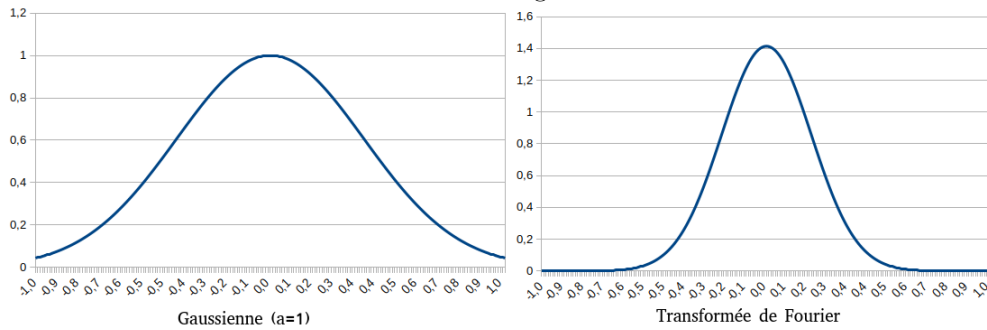
Fenêtre gaussienne. La version originale de la transformation à fenêtre glissante, due à Dennis Gabor, utilisait une fenêtre gaussienne. Cette fenêtre n'est pas à support compact, mais décroît tellement vite à l'infini qu'elle garde un intérêt pratique. Une fenêtre gaussienne telle que $\|w\|_{L^2} = 1$ est définie par

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

où $a > 0$ est encore un paramètre temporel. Sa transformée de Fourier est:

$$\hat{w}(\lambda) = \sqrt{2ae}^{-2\pi a^2 \lambda^2}.$$

FIGURE 3. Fenêtre gaussienne



APPENDICE A

Notations

On note $C_b^0(\mathbb{R}) = C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , à valeurs complexes. Cet espace est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,$$

qui en fait un espace de Banach.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Schwartz, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées, δ_a la masse de Dirac en a , définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Ces notions ont été vues dans le tronç commun du cours d'analyse harmonique et sont rappelées au début du Chapitre 2, p. 17.

Pour $1 \leq p < \infty$, on note L_T^p l'espace vectoriel des fonctions mesurables, T périodique, telle que

$$\|f\|_{L_T^p}^p := \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^p dt < \infty.$$

La définition des espaces $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z})$ est rappelée au début du Chapitre 4, p. 45.

$\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$ désigne la fonction indicatrice (ou fonction caractéristique) d'un ensemble \mathcal{E} :

$$\mathbb{1}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{E}. \end{cases}$$