CP2I2. Mathématiques. Examen du 10/12/2021

Durée: 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'Institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement.

Exercice 1 (Questions de cours). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

a. Donner la définition de la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. On suppose $n = 3$, et que f est l'endomorphisme tel que $f(e_1) = e_1 - e_3$, $f(e_2) = 3e_2$, $f(e_3) = 2e_2 + 4e_3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

c. Donner la définition du polynôme caractéristique χ_f de f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur χ_f pour que f soit trigonalisable.

d. Donner une condition suffisante sur χ_f pour que f soit diagonalisable. Montrer par un contre-exemple explicite que cette condition n'est pas nécessaire.

e. Donner l'exemple d'une matrice 2×2 trigonalisable qui n'est pas diagonalisable. On prendra bien soin de justifier que la matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & -14 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique de A. Donner les valeurs propres de A.

b. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

c. Dire si A est trigonalisable, puis si A est diagonalisable. Déterminer une matrice 3×3 inversible P telle que

$$P^{-1}AP \text{ soit } \begin{cases} \text{diagonale} & \text{si } A \text{ est diagonalisable.} \\ \text{triangulaire supérieure} & \text{si } A \text{ est trigonalisable, non diagonalisable.} \end{cases}$$

Donner également $P^{-1}AP$.

Exercice 3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Répondre aux questions a,b et c de l'exercice précédent en remplaçant A par B.

Exercice 4. Soit $(y_k)_{k \geq 1}$ la suite réelle définie par

$$y_0 = a,\ y_1 = b,\ \forall k \geq 0,\ y_{k+2} = y_{k+1} + 2y_k.$$

a. Soit $Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que

$$\forall k \geq 0, \quad Y_{k+1} = MY_k.$$

b. Calculer le polynôme caractéristique de M. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

c. Calculer M^k pour tout $k \geq 0$. En déduire y_k en fonction de a et b.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que

$$\lim_{k \to \infty} y_k = -\infty.$$