CP2I2. Mathématiques. Examen du 02/12/2022

*Durée: 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'Institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement.*

*Exercice* 1 (Questions de cours, 7 pts). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mu$ une valeur propre de $E$.

a. Donner la définition du polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$. Que vaut $\chi_f(\mu)$?

b. Donner la définition du sous-espace propre de $f$ associé à $\mu$.

c. Donner la définition de la multiplicité géométrique et de la multiplicité algébrique de $\mu$. Donner une inégalité entre ces deux quantités.

d. Donner la définition du sous-espace caractéristique de $f$ associé à la valeur propre $E$. Quelle est sa dimension?

e. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme caractéristique de $f$ et les multiplicités des valeurs propres pour que $f$ soit diagonalisable.

f. Illustrer les définitions précédentes, en donnant un exemple de matrice triangulaire supérieure $3 \times 3$, $A = [a_{i,j}]$, dont le spectre est $\{1, 2\}$ et qui n'est pas diagonalisable. On donnera les multiplicités, le sous-espace propre, le sous-espace caractéristique associé à chaque valeur propre.

*Exercice* 2 (5pts). Soit $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique de $A$. Donner les valeurs propres de $A$.

b. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

c. Dire si $A$ est trigonalisable, puis si $A$ est diagonalisable. Déterminer une matrice $3 \times 3$ inversible $P$ telle que

$$P^{-1}AP \text{ soit } \begin{cases} \text{diagonale} & \text{si } A \text{ est diagonalisable.} \\ \text{triangulaire supérieure} & \text{si } A \text{ est trigonalisable, non diagonalisable.} \end{cases}$$

Donner également $P^{-1}AP$.

*Exercice* 3 (5pts). Soit $B = \begin{pmatrix} -8 & -7 & -14 \\ 14 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Répondre aux questions a,b et c de l'exercice précédent en remplaçant $A$ par $B$.

*Exercice* 4 ($\geq$3pts). Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f^3 + (1-i)f^2 - if = 0$ (où 0 désigne l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$).

a. Soit $\lambda$ une valeur propre de $E$. Montrer que $\lambda$ annule un certain polynôme de degré 3 que l'on explicitera. Montrer que $\lambda \in \{i, 0, -1\}$.

b. On suppose $\operatorname{Tr} f = i - 1$. Déterminer les valeurs propres de $f$ et leurs multiplicités géométriques.

c. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $f$? Déterminer si $f$ est ou non diagonalisable selon son rang.