THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
EXAMEN FINAL

INSTITUT GALILÉE.
SUP GALILÉE, MACS 2, 2020-2021

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Sauf mention contraire, toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Dans tout l'examen, d est un entier naturel non nul. Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ etc...) sont les mêmes que dans le cours.

Exercice 1.
1.1) Donner la définition de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$. Donner une distance δ sur cet espace tel que $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \delta\big)$ soit un espace métrique complet.
1.2) Donner la définition de l'espace vectoriel des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
1.3) Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

1.4) Soit φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, telle que $\varphi(0) = 1$, à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\varphi_n : x \mapsto \varphi(x_1 - n, x_2, \dots, x_d).$$

Vérifier que la suite de fonction $(\varphi_n)_n$ converge simplement et donner sa limite. La suite $(\varphi_n)_n$ converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$? Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$?
1.5) On considère le peigne de Dirac P, défini par

$$\langle P, \varphi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Montrer que P est une distribution tempérée, dont on donnera le support.
1.6) Donner un exemple d'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne se prolonge pas en une distribution tempérée.

Exercice 2.
2.1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ existe-t-il $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi' = \varphi$. On ne demande pas de démonstration.
2.2) Déduire de la question précédente toutes les solutions de l'équation

$$\text{(D)} \qquad T' = 0, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Date: Lundi 12 Octobre 2020.

2.3) On considère l'équation

$$\text{(H)} \qquad T'' + T = 0, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Rappeler l'ensemble Σ des solutions classiques de (H), c'est à dire les fonctions $T \in C^2(\mathbb{R})$ qui vérifient (H).

2.4) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (H) au sens des distributions. On considère les distributions

$$A = T' \cos + T \sin, \quad B = T' \sin - T \cos .$$

(ici $T' \cos$ désigne le produit de la distribution T' par la fonction cosinus, etc...). Montrer que A et B sont en fait des fonctions constantes. Calculer $A \sin - B \cos$. En déduire que toute solution de (H) au sens des distributions est en fait une solution classique.

2.5) Rappeler la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définira précisément la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ dans ces deux espaces.

2.6) Déterminer la transformée de Fourier de δ_1 et δ_{-1} (les impulsions de Dirac en 1 et -1). En déduire les transformées de Fourier des fonctions cosinus et sinus.

2.7) Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation d'inconnue U :

$$(x^2 - 1)U = 0, \quad U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

2.8) Soit Λ la distribution associée à la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer Λ' et Λ'' au sens des distributions. On justifiera rigoureusement l'utilisation de la formule des sauts.

2.9) Donner toutes les solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad T'' + T = \delta_0 + \frac{|x|}{2}, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. On désigne par (x, y) les coordonnées du point courant de $\mathbb{R}^2$. Soit V la distribution sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad < V, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(x, 0)dx.$$

3.1) Quel est le support de V ?

3.2) Calculer $\frac{\partial V}{\partial x}$ au sens des distributions.

Exercice 4. Soit f la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier.

4.1) Justifier que $\widehat{f}$ est une fonction continue et que $\left|\widehat{f}\right|^2$ est intégrable. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$ sans calculer $\widehat{f}$.

4.2) Calculer $\widehat{f}$.

4.3) Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $< E, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{e^{-|x|}}{x} \varphi(x)dx$. Montrer que la limite précédente existe, et que cela définit une distribution tempérée.

4.4) Calculer la distribution xE.

4.5) Déduire des questions précédentes la transformée de Fourier de la fonction arctan.