THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
EXAMEN FINAL

INSTITUT GALILÉE.
SUP GALILÉE, MACS 2, 2019-2020

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Dans tout l'examen, sauf mention contraire, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ etc...) sont les mêmes que dans le cours.

Exercice 1 (Questions de cours)**.**
1.1) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Rappeler la définition de
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$
1.2) Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ non nulle et $\varphi_n(x) = e^{-n}\chi(x-n)$. Est-ce que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand n tend vers l'infini ?
1.3) Donner la définition d'une distribution sur Ω.
1.4) Donner la définition d'une distribution d'ordre finie et de l'ordre d'une distribution.
1.5) Soit $a \in \Omega$ et δ_a la masse de Dirac en a. Rappeler la définition de δ_a. Montrer que δ_a est une distribution d'ordre finie et déterminer son ordre.
1.6) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. Donner la définition de la notation $\partial_x^\alpha f$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Donner la définition de la dérivée $\partial_x^\alpha T$ de T au sens des distributions.
1.7) Montrer que la distribution $\delta_0' = \frac{d\delta_0}{dx}$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution d'ordre exactement 1.
1.8) Donner la définition du produit fT, où $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
1.9) Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Montrer la formule :
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\,T) = \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Exercice 2.
2.1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \in [-1, +1] \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}.$$
Justifier que g définit une distribution T_g sur $\mathbb{R}$, dont on rappellera la définition exacte. Montrer que T_g est une distribution tempérée.

Date: Lundi 14 Octobre 2019.

2.2) Calculer la dérivée de T_g au sens des distributions. On pourra appliquer (en justifiant rigoureusement) la formule des sauts.
2.3) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et δ_a la masse de Dirac en a. Calculer la transformation de Fourier de δ_a.
2.4) Déterminer la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^d$.
2.5) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Rappeler les formules donnant les transformations de Fourier de $x_j T$ et $\partial_{x_j} T$ en fonction de la transformation de Fourier de T.
2.6) Déduire des deux questions précédentes la transformation de Fourier de la fonction identité $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.
2.7) En utilisant les questions précédentes, calculer la transformation de Fourier de T_g'.

Exercice 3. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$< S, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(0, x_2)\, dx_2.$$

3.1) Déterminer le support de S.
3.2) Calculer $\frac{\partial S}{\partial x_2}$.

Exercice 4.
4.1) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Exprimer la transformation de Fourier de $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u$ en fonction de celle de u.
4.2) Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation d'inconnue $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u = f$$

a une unique solution.
4.3) On suppose $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que la solution u de l'équation (E) est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de classe C^1.