L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université
Paris 13

Examen du 3 mai 2012

Durée: 3h30. Tout document et appareil électronique est interdit.

Barême indicatif: **1:** 3,5 **2:** 3 **3:** 3 **4:** 5 **5:** 5,5.

Exercice 1.

a) Calculer le déterminant: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et M_a la matrice: $M_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Calculer $\det M_a$.

(ii) Donner le rang de M_a en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définies par

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + 7z, x - 2y + 2z), \qquad g(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y, x - 2y).$$

a) Déterminer l'image de f et le noyau de g. L'application f est-elle surjective et/ou injective? Même question pour l'application g.

b) Donner les matrices de f et g dans les bases canoniques.

c) Calculer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

b) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de f (on prendra $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) Déterminer des vecteurs propres $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de f associés respectivement à λ_1 et λ_2.

d) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis donner (sans calcul) la matrice de f dans cette base (i.e. la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$).

Exercice 4.

a) Montrer que la matrice P qui suit est inversible et calculer son inverse:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, x + y).$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f.

c) Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ la famille de $\mathbb{R}^2$: $\widetilde{\mathcal{C}} = \big((1,1),(1,2)\big)$. Justifier que $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer les matrices de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}$ et $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}$.

d) Soit $\widetilde{\mathcal{B}}$ la famille de $\mathbb{R}^3$: $\widetilde{\mathcal{B}} = \big((-1,1,1),(-2,2,1),(1,-2,-2)\big)$. Montrer que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les matrices de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ et $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}$.

e) Calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$.

Exercice 5.

a) Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Rappeler une relation entre $\dim E$, $\dim F$, $\dim(E\cap F)$ et $\dim(E+F)$.

b) Soit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 = (-1,0,2,2), \quad \vec{v}_2 = (2,-1,-3,-2), \quad \vec{v}_3 = (1,-1,-1,0).$$

La famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est-elle libre?

c) Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$: $\mathrm{vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$. Donner une base et la dimension de E. Quel est le rang de la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$?

d) Décrire E par un système d'équations linéaires.

Pour chacun des sous-espaces F de $\mathbb{R}^4$ qui suivent:

- (i) Donner (en justifiant vos réponses) la dimension de F, de $E\cap F$ puis de $E+F$. *Indication: pour étudier $E\cap F$, on pourra notamment utiliser la question* ***d)****.*
- (ii) Déterminer si la somme $E+F$ est directe et si E et F sont supplémentaires.

e) $F = \mathrm{vect}\Big((1,1,2,0)\Big)$.

f) $F = \Big\{(x,y,0,0),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\Big\}$.

g) $F = \Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ t.q. } 2x+y+z=0 \text{ et } x+y=0\Big\}$.

Exercice 6 (Facultatif)**.** Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note pour tout entier $n\geq 1$,

$$f^n = \underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ fois}}, \quad f^0 = \mathrm{Id}_E.$$

a) Montrer que pour $n\geq 0$, $\mathrm{Im}(f^{n+1})\subset\mathrm{Im}(f^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(f^n)\subset\mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$.

b) Montrer que la suite $(\mathrm{rg}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(\dim(\mathrm{Ker}\,f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que ces suites convergent.

c) Déduire de la question précédente qu'il existe $N_0\geq 0$ tel que

$$\forall n\geq N_0, \quad \dim\mathrm{Ker}\,(f^n) = \dim\mathrm{Ker}\,\big(f^{N_0}\big) \text{ et } \mathrm{rg}\,(f^n) = \mathrm{rg}\,\big(f^{N_0}\big).$$

d) Montrer que pour tout $n\geq N_0$, $\mathrm{Ker}\,f^n = \mathrm{Ker}\,f^{N_0}$ et $\mathrm{Im}\,f^n = \mathrm{Im}\,f^{N_0}$.

e) Montrer $\mathrm{Im}\,f^{N_0}\oplus\mathrm{Ker}\,f^{N_0} = E$.