Exercices à préparer pour le contrôle continu
Feuilles 1 et 2

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2013-2014, 2ème semestre

Le contrôle continu aura lieu lors de la semaine 4 (semaine du lundi 3 février)

Exercice 1. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$2e^{-i\pi/6}, \quad (1+i)^{20}, \quad \frac{1+2i}{1+i}$$

(ou tout autre quotient de deux nombres complexes, chacun sous forme cartésienne).

Exercice 2. Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

$$-1+i, \quad 3-i\sqrt{3}, \quad (1+i\sqrt{3})^{12}.$$

Exercice 3. Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$.

Exercice 4.
a) Exprimer $(a+b)^6$ en fonction de puissances de a et b.
b) Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\sin x$ **et cos** x.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2+4z+5&=0 \\ 2z^2+(1-2i)z-1+i&=0 \\ z^2-6iz-9&=0 \end{aligned}$$

(ou tout autre trinôme du second degré à coefficients complexes).

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^{10}=32, \quad z^6=1+i.$$

Exercice 7. Donner le degré, le coefficient dominant, le polynôme dérivé des polynômes suivants :

$$X^3 + 2X^4 + 1, \quad \sum_{k=0}^{3} kX^{2k+1}, \quad (X+1)(X-1)(4X+3).$$

Exercice 8. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

$$A = X^4 + 3X^3 + X^2 + X + 1, \quad B = X^2 + X.$$

$$A = X^5 + (1+2i)X^3 + X^2 + iX, \quad B = X^3 + (1+i)X + 1.$$

Exercice 9. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2$.
a) Montrer que -1 est une racine de P et donner son ordre de multiplicité.
b) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10. Décomposer $P = X^3 + 2iX^2 - (4+i)X + 3 - i$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11. Soit $A = X^2 + X + 1 + i$.
a) Calculer les racines de A.
b) Soit $B = X^6 + (2i-3)X - 1 - 3i$. En utilisant a), montrer que B est divisible par A.