ALGÈBRE LINÉAIRE
CORRECTION DU PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2013-2014

Exercice 1.

a) On sait par le cours que l'équation $u^2 = -3 + 4i$ a exactement deux solutions, qui sont opposées. Soit u une solution, x sa partie réelle et y sa partie imaginaire. En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation, on obtient

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \text{et} \quad 2xy = 4. \tag{1}$$

De plus, par l'égalité des modules $|u|^2 = |-3 + 4i| = 5$,

$$x^2 + y^2 = 5. \tag{2}$$

En additionnant la première équation de (1) et (2), on obtient $2x^2 = 2$, soit $x = 1$ ou $x = -1$. En soustrayant ces deux équations, on obtient $2y^2 = 8$, soit $y = 2$ ou $y = -2$. La deuxième équation de (1) montre que xy est positif. D'où les deux solutions :

$$u = -1 - 2i \text{ et } u = 1 + 2i.$$

b) Le discriminant de ce trinôme complexe du second degré est $\Delta = 1 - 4(1 - i) = 4i - 3$, dont les racines carrées ont été calculées à la question précédente. On en déduit les deux racines du trinôme :

$$\frac{1 + 1 + 2i}{2} = 1 + i \text{ et } \frac{1 - 1 - 2i}{2} = -i.$$

c) Le nombre complexe $-i$, de module 1, est l'affixe du point $(0, -1)$. Il a donc pour argument $-\frac{\pi}{2}$:

$$-i = e^{-i\pi/2}.$$

On a $|1 + i| = \sqrt{2}$ et, en utilisant des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

d) Les deux équations peuvent se mettre sous la forme $z^3 = \rho e^{i\theta}$. D'après le cours, chacune des équations a trois solutions :

$$\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3 + \frac{2ik\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

On peut aussi employer la notation $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les solutions sont alors $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}$, $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}j$ et $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}j^2$.

(i) *Equation* $z^3 = 1 + i$. En utilisant la forme polaire de $1 + i$ donnée dans la question précédente, on obtient les trois solutions :

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Date: Mardi 18 février 2014.

(ii) *Equation* $z^3 = -i$. En utilisant la forme polaire de $-i$ donnée dans la question précédente, on obtient les trois solutions :

$$e^{-\frac{i\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

e) On a $P = (X^3)^2 - X^3 + 1 - i$. On en déduit que le nombre complexe z est une racine de P si et seulement si $Z = z^3$ est solution de $Z^2 - Z + 1 - i$. D'après la question a), z est une racine de P si et seulement si

$$z^3 = 1 + i \quad \text{ou} \quad z^3 - i.$$

D'après la question d), le polynôme P a 6 racines,

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2ik\pi}{3}}, \quad e^{-\frac{i\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Le polynôme P est de degré 6 : il a exactement 6 racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité. Les 6 racines trouvées sont distinctes deux à deux. Ce sont donc toutes des racines simples.

Exercice 2. On considère le polynôme :

$$P = X^5 - 2X^4 - 16X + 32.$$

a) En posant la division euclidienne, on obtient que le quotient de la division euclidienne de P par $X^3 - X^2$ est $X^2 - X - 1$, et son reste $-X^2 - 16X + 32$.

b) On a

$$P' = 5X^4 - 8X^3 - 16, \quad P'' = 20X^3 - 24X^2.$$

Par des calculs explicites, on obtient :

$$P(2) = 0, \quad P'(2) = 0, \quad P''(2) = 64 \neq 0,$$

et

$$P(-2) = 0, \quad P'(-2) = 128 \neq 0.$$

Donc 2 est racine double de P, -2 est racine simple de P.

c) D'après la question précédente, les facteurs $X + 2$ et $(X - 2)^2$ apparaissent dans la décomposition demandée.

On divise P par $X + 2$ (directement ou en posant la division euclidienne) :

$$P = (X + 2)(X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 16X + 16).$$

On divise ensuite $X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ par $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$:

$$X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 16X + 16 = (X^2 - 4X + 4)(X^2 + 4).$$

Le polynôme $X^2 + 4$ est un trinôme du second degré à discriminant < 0. C'est donc un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$. La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X + 2)(X - 2)^2(X^2 + 4).$$

d) Les deux racines complexes de $X^2 + 4$ sont $2i$ et $-2i$. On a donc $X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$. La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P = (X + 2)(X - 2)^2(X - 2i)(X + 2i).$$

e) D'après la question c),

$$P = (X + 2)(X - 2)(X - 2)(X^2 + 4) = (X^2 - 4)(X - 2)(X^2 + 4) = (X - 2)A,$$

ce qui montre que A divise P.

Puisque $B(3) = 0$ et $P(3) \neq 0$, B ne divise pas P.

Le trinôme du second degré C a un discriminant nul, et pour racine double -2. Puisque -2 est seulement racine simple de P, C ne divise pas P.

D'après la question c), $P = (X + 2)(X^2 + 4)D$, donc D divise P.

Exercice 3.

a) Soit :

$$(S)\qquad \begin{cases} -3x+4y+(4i-3)z=-7i\\ -x+y+(i-1)z=-2i\\ -2y-2iz=2i. \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot. Par les opérations $(L_1)\leftrightarrow(L_2)$, $(L_2)\leftarrow(L_2)-3(L_1)$ puis $(L_3)\leftarrow(L_3)+2(L_2)$, on obtient que (S) est équivalent au système échelonné :

$$\begin{cases} -x+y+(i-1)z=-2i\\ y+iz=-i \end{cases}$$

On en déduit que (S) est compatible. Pour écrire l'ensemble des solutions, on met le système sous forme échelonnée réduite par les opérations $(L_1)\leftarrow-(L_1)$ et $(L_1)\leftarrow(L_1)+(L_2)$. On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x+z=i\\ y+iz=-i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc :

$$\mathcal{S}=\Big\{(i-z,-i-iz,z),\quad z\in\mathbb{C}\Big\}.$$

b) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On montre par l'absurde que (S_λ) ne peut pas avoir une unique solution. Si (S_λ) avait une unique solution, ce serait un système de Cramer (système avec le même nombre d'équations que d'inconnues et une unique solution). Par un théorème du cours, tout système avec les mêmes coefficients, et en particulier le système (S), serait un système de Cramer. Or on a montré a la question précédente que (S) avait une infinité de solutions, ce qui donne la contradiction recherchée.

Le système (S_λ) n'a donc jamais une unique solution.

Exercice 4.

a) On rappelle la formule du binôme de Newton pour les puissances cinquième :

$$(s+t)^5=s^5+5s^4t+10s^3t^2+10s^2t^3+5st^4+t^5.$$

On a :

$$\cos(5a)=\operatorname{Re}e^{i5a}=\operatorname{Re}\left(e^{ia}\right)^5=\operatorname{Re}\left(\cos a+i\sin a\right)^5.$$

En utilisant la formule du binôme, on obtient

$$\cos(5a)=\cos^5a-10\cos^3a\sin^2a+5\cos a\sin^4a.$$

Par la formule trigonométrique $\sin^2a=1-\cos^2a$ et des calculs explicites, on en déduit :

$$\cos(5a)=16\cos^5a-20\cos^3a+5\cos a.$$

b) Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$ pour tout entier k, on a :

$$\cos\left(5\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(15\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(35\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(45\frac{\pi}{10}\right)=0.$$

En appliquant la question précédente à $a=\frac{\pi}{10}$, $a=\frac{3\pi}{10}$, $a=\frac{7\pi}{10}$ et $a=\frac{9\pi}{10}$, on obtient que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ sont des racines du polynôme

$$16X^5-20X^3+5X=16X\left(X^4-\frac{5}{4}X^2+\frac{5}{16}\right).$$

Puisque ces 4 nombres sont non nuls, on en déduit que ce sont des racines du polynôme $X^4-\frac{5}{4}X^2+\frac{5}{16}$. Notons que ces racines sont distinctes deux à deux : ceci découle immédiatement du fait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Finalement, on a trouvé les 4 racines du polynôme de degré 4 : $X^4 - \frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{16}$ et sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$\left(X - \cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X + \cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X - \cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(X + \cos\frac{3\pi}{10}\right) = X^4 - \frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{16}.$$

c) Comme dans la question a), on utilise la formule du binôme, puis la formule $\sin^2 = 1 - \cos^2$ pour exprimer $\cos(2n\,a)$ en fonction de $\cos a$:

$$\begin{aligned}\cos(2n\,a) &= \operatorname{Re}\left(e^{ia}\right)^{2n} = \operatorname{Re}\,(\cos a + i\sin a)^{2n}\\ &= \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\cos a)^k(i\sin a)^{2n-k}\\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{2j}(\cos a)^{2j}(\sin a)^{2n-2j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{2j}(\cos a)^{2j}(1-\cos^2 a)^{n-j}.\end{aligned}$$

Soit

$$Q = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{2j}X^{2j}(1-X^2)^{n-j} - 1.$$

C'est un polynôme à coefficients entiers. Le coefficient de X^{2n} est $\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j} > 0$: Q est donc de degré $2n$. De plus, en appliquant le développement de $\cos(2n\,a)$ obtenu précédemment à $a = m\pi/n$, et en utilisant que $\cos(2m\pi) = 1$, on obtient $Q\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right) = 0$, ce qui répond à la question.