ALGÈBRE LINÉAIRE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2013-2014

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrice de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (7 points)**.**
a) Déterminer les nombres complexes u tels que $u^2 = 4i - 3$.
b) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - z + 1 - i = 0.$$

c) Mettre sous forme polaires les nombres complexes $-i$ et $1 + i$.
d) Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnues $z \in \mathbb{C}$:

(i) $z^3 = 1 + i$.
(ii) $z^3 = -i$.

e) Donner les racines du polynôme $P = X^6 - X^3 + 1 - i$. Déterminer, en justifiant rigoureusement, leurs ordres de multiplicité.

Exercice 2 (6 points)**.** On considère le polynôme :

$$P = X^5 - 2X^4 - 16X + 32.$$

a) Donner le reste et le quotient de la division euclidienne de P par $X^3 - X^2$.
b) Montrer que 2 et -2 sont des racines de P. Déterminer leurs ordres de multiplicité.
c) Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
d) Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
e) A l'aide des questions précédentes, dire avec le moins de calcul possible si les polynômes suivants divisent P :

$A = (X^2+4)(X^2-4)$, $\quad B = X-3$, $\quad C = X^2+4X+4$, $\quad D = X^2-4X+4$.

Date: Mardi 18 février 2014.

Exercice 3 (3,5 points)**.**

a) Résoudre le système suivant, d'inconnues complexes x, y et z :

$$(S) \qquad \begin{cases} -3x + 4y + (4i-3)z = -7i \\ -x + y + (i-1)z = -2i \\ -2y - 2iz = 2i \end{cases}$$

b) On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer, sans calcul supplémentaire, si le système suivant a une unique solution (x, y, z) :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} -3x + 4y + (4i-3)z = 4\lambda \\ -x + y + (i-1)z = 2\lambda + 1 \\ -2y - 2iz = \lambda^2. \end{cases}$$

On ne demande pas de résoudre le système.

Exercice 4 (3,5 points + bonus)**.**

a) Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$, puis seulement en fonction de $\cos(a)$.

b) A l'aide de la question précédente, montrer

$$\left(X - \cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X + \cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X - \cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(X + \cos\frac{3\pi}{10}\right) = X^4 - \frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{16}.$$

La questions suivante est hors barême : il est conseillé d'avoir terminé le reste du sujet avant de la traiter.

c) D'après la question (b), il existe un polynôme non nul P, à coefficients entiers, tel que

$$P\left(\cos\frac{\pi}{10}\right) = 0.$$

Soit m et n des entiers naturels avec $n \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme Q non nul, à coefficients entiers, tel que

$$Q\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right) = 0.$$

On dit que $\cos\frac{m\pi}{n}$ est *algébrique.*