Algèbre linéaire

Correction du partiel n°2

Exercice 1

a) Un sous-espace vectoriel F de E est un sous ensemble F de E tel que :

(i) $\vec{0}_E \in F$

(ii) $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$

(iii) $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda\vec{x} \in F$

b) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E quand pour tout $\vec{x}$ de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \dots + \lambda_n\vec{e_n}$

Exercice 2

a) On note $x = \operatorname{Re} u$ et $y = \operatorname{Im} u$

$$u^2 = 12i - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |12i - 5| = \sqrt{169} = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2ixy = 12i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \cancel{169-5=} 13 - 5 = 8 \\ 2y^2 = 13 + 5 = 18 \\ xy = 6 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 2$ ou $x = -2$. La deuxième équation donne $y = 3$ ou $y = -3$. Par la troisième équation, x et y doivent avoir le même signe.

Finalement

$$u^2 = 12i - 5 \iff u = 2+3i \text{ ou } u = -2-3i$$

b) Le discriminant vaut :

$$\Delta = -1 - 4(1-3i) = 12i - 5$$

En utilisant a), on obtient les deux racines de l'équation :

$$z = \frac{-i-2-3i}{2} = -1-2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i+2+3i}{2} = 1+i$$

c) Les deux racines (simples) de $X^2+iX+1-3i$ sont $-1-2i$ et $1+i$.
Pour montrer que P est divisible par $X^2+iX+1-3i$, il suffit de vérifier que $P(-1-2i)=0$ et $P(1+i)=0$.

~~On a :~~ $\cancel{P(-1-2i) = (-1-2i)^3 + i(-1-2i) + 1-3i}$

~~et~~ $\cancel{(-1-2i)^3 = -1-6i+12+8i = 11-14i}$

$$(-1-2i)^2 = (1+2i)^2 = 1-4+4i = 4i-3$$

$$(-1-2i)^3 = (4i-3)(-1-2i) = 3+8+6i-4i = 11+2i$$

$$\begin{aligned} P(-1-2i) &= 11+2i+(i-1)(4i-3)+(1-4i)(-1-2i)+3i-1 \\ &= 11+2i-7i-1-9+2i+3i-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(1+i)^2 = 1-1+2i = 2i \qquad (1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$$

$$\begin{aligned} P(1+i) &= -2+2i+2i(i-1)+(1-4i)(1+i)+3i-1 \\ &= -2+2i-2-2i+5-3i+3i-1 = 0 \end{aligned}$$

CQFD

Autre méthode : on effectue la division euclidienne de P par $X^2+iX+1-3i$:

$$X^3+(i-1)X^2+(1-4i)X+3i-1 = (X^2+iX+1-3i)(X-1)$$

Exercice 3

a) On utilise la méthode du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 9 & 19 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 19 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_3) \\ \\ (L_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -(L_1) \\ (L_2)-2(L_1) \\ (L_3)-6(L_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (L_3)-3(L_2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_1)+(L_2)+3(L_3) \\ \\ \\ \end{array}$$

Donc $\begin{bmatrix} -6 & 9 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ est inversible, d'inverse :

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -6 & 9 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) et c) L'équation s'écrit :

$$MX = B \quad \text{où } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Puisque M est inversible, elle est équivalente à :

$$X = M^{-1}B \text{ , où } M^{-1} \text{ a été calculé en a).}$$

Pour tout triplet (a,b,c) (S) a donc une unique solution (x, y, z) donnée par :

$$\begin{cases} x = 3a - 8b - 3c \\ y = b - 2c \\ z = a - 3b \end{cases}$$

Dans le cas $(a,b,c) = (1,0,1)$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

a) E est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 4 inconnues sur $\mathbb{R}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) On résout (S) en prenant x_1 et x_2 comme variables de base, x_3 et x_4 comme paramètres ((S) est déjà sous forme échelonnée réduite). L'ensemble des solutions est : $E = \{(2x_3 - x_4, x_4, x_3, x_4) : (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$

On écrit :

$$E = \left\{ x_3(2,0,1,0) + x_4(-1,1,0,1) : (x_3,x_4) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

E est donc un espace vectoriel de dimension 2, de base $((2,0,1,0);(-1,1,0,1))$. (la famille, formée de 2 vecteurs non colinéaires, est ~~donc~~ bien libre)

c) On vérifie facilement que $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ sont des vecteurs de E.

. $\mathcal{F}$ a un seul vecteur non nul. C'est donc une famille libre. En revanche puisque $\dim E = 2 > 1$, $\mathcal{F}$ ne peut pas être une famille génératrice. Donc $\mathcal{F}$ n'est pas non plus une base.

. $\mathcal{G}$ est formé de deux vecteurs colinéaires : c'est donc une famille libre. De plus $\dim E = |\mathcal{G}| = 2$. Donc $\mathcal{G}$ est une famille libre maximale, i.e une base de E. En particulier c'est une famille génératrice de E

. $\mathcal{H}$ complète $\mathcal{G}$, qui est une famille génératrice de E. Donc $\mathcal{H}$ est une famille génératrice de E. $|\mathcal{H}| = 3 > 2$ donc $\mathcal{H}$ n'est pas libre (et n'est pas non plus une base de E).

<u>Exercice 6</u>

a) Le noyau de f est l'ensemble :

$$\ker f = \{ \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{0}_F \} \subset E$$

L'image de f est l'ensemble :

$$\{ f(\vec{x}) \; ; \; \vec{x} \in E \} \subset F$$

b) $f(x,y,z) = (y+z, \; x+2y+3z)$

c) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ \quad\;\; y+z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x \quad\;\; + z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{ (-z,-z,z) ; \; z \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}((-1,-1,1))$

Une base du noyau de $\operatorname{Ker} f$ est donnée par la famille à un vecteur $((-1,-1,1))$. $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1.

Exercice 7

a) $(T) \; : \; \begin{cases} x-y = a \\ 2x+2y = b \\ 3x+7y = c \end{cases} \iff \begin{cases} x-y = a & \\ 4y = b-2a & (L_2)-2(L_1) \\ 10y = c-3a & (L_3)-3(L_1) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x-y = a & \\ 4y = b-2a & \\ 0 = c-\frac{5}{2}b+2a & (L_3)-\frac{5}{2}(L_2) \end{cases}$$

(T) a au moins une solution si et seulement si

$2c-5b+4a=0$

b) $(a,b,c) \in \vec{F}$ si et seulement si il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x\vec{u} + y\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

i.e si (T) a au moins une solution.

Par a), on obtient que $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ si et seulement

si $2c-5b+4a=0$.

F est de dimension 2 car $(\vec{u},\vec{v})$ est libre (2 vecteurs non colinéaires)

c) Soit $\vec{x} = \lambda\,(2,1,1)$ un vecteur de $G \cap F$.

Par b), on a $4(2\lambda)-5\lambda+2\lambda=0$ donc $\lambda=0$, ce qui

montre: $F \cap G = \{\vec{0}\}$

La somme $F+G$ est directe.

On a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$

$$= 2 + 1 - 0$$

$$= 3$$

Donc $F+G = \mathbb{R}^3$ et F et G sont supplémentaires.

Exercice 4 Le produit MN est défini si et seulement si le nombre de lignes de N est égal au nombre de colonnes de M. A^2, C^2 et AB sont bien définis. B^2 et BA ne sont pas définis.

A^2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 6+3i \\ 2+i & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

C^2?

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6+3i \\ 2+i & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & -1+2i & 3i \end{bmatrix} \end{array}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & -1+2i & 3i \end{bmatrix}$$

b) La première colonne de C^2 est nulle : C^2 n'est donc pas inversible.

Si C était inversible, C^2 le serait aussi (d'inverse $(C^{-1})^2$). Donc C n'est pas inversible.