ALGÈBRE LINÉAIRE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2013-2014

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E.
b) Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E. Que signifie "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E" ?

Exercice 2.
a) Déterminer les nombres complexes u tels que $u^2 = 12i - 5$.
b) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + iz + 1 - 3i = 0.$$

c) Soit P le polynôme

$$P = X^3 + (i-1)X^2 + (1-4i)X + 3i - 1.$$

Montrer que P est divisible par $X^2 + iX + 1 - 3i$.

Exercice 3.
a) Soit

$$M = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}. *On demande d'indiquer les calculs intermédiaires : tout résultat, même juste, sans ces calculs ne sera pas comptabilisé.*
b) On fixe des paramètres réels a, b et c, et on considère le système suivant, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \qquad \begin{cases} -6x + 9y + 19z = a \\ -2x + 3y + 6z = b \\ -x + y + 3z = c. \end{cases}$$

Date: Mardi 13 Mai 2014.

c) A l'aide de la question précédente, discuter le nombre de solutions de (S) et donner la (les) solution(s) éventuelle(s) en fonction de a, b et c. Donner les valeurs numériques lorsque $(a, b, c) = (1, 0, 1)$.

Exercice 4.

a) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer les matrices A^2, B^2, C^2, AB, BA lorsqu'elles sont définies.

b) La matrice C^2 est-elle inversible ? Et la matrice C ? On justifiera soigneusement ses réponses.

Exercice 5.

a) On note E l'ensemble des solutions réelles (x_1, x_2, x_3, x_4) du système :

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) Résoudre (S). En déduire une base et la dimension de E en justifiant proprement.

c) On considère les vecteurs de E

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{e}_2 = (0, 2, 1, 2), \quad \vec{e}_3 = (1, 0, 1/2, 0).$$

Déterminer si chacune des familles suivantes est une famille libre, une famille génératrice de E et/ou une base de E :

$$\mathcal{F} = (\vec{e}_1), \quad \mathcal{G} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2), \quad \mathcal{H} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Exercice 6.

a) Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une application linéaire de E dans F. Donner la définition du noyau et de l'image de f.

b) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dans les base canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Déterminer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

c) Donner une base du noyau de f.

Exercice 7.

a) A quelle condition sur les paramètres a, b et c le système

$$(T) \qquad \begin{cases} x - y = a \\ 2x + 2y = b \\ 3x + 7y = c, \end{cases}$$

d'inconnues réelles x et y, a-t-il au moins une solution ? On ne demande pas de déterminer explicitement la ou les solutions.

b) On considère les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

et F l'espace vectoriel $F = \operatorname{vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Justifier que F est de dimension 2. Expliciter l'affirmation "(a, b, c) appartient à F". En déduire, à l'aide de la question précédente, une équation cartésienne de F.

c) Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Déterminer $F \cap G$. En déduire la dimension de $F + G$. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?