TD 1: les nombres complexes

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2013-2014, 2ème semestre

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si z est un nombre complexe, on note $\operatorname{Re} z$ sa partie réelle et $\operatorname{Im} z$ sa partie imaginaire.

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $\operatorname{Re}(iz)$, $\operatorname{Im}(iz)$, $\operatorname{Re}(i\overline{z})$, $\operatorname{Re}(z^2)$, $\operatorname{Im}(z^3)$ en fonction de $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$.

Exercice 2. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{4i}, \quad \frac{3+i}{2-3i}, \quad \frac{1}{3+i}+\frac{1}{3-i}, \quad \frac{2+i}{1-2i}+\frac{i}{1+i}.$$

Exercice 3.
a) Soit a et b deux nombres complexes. Calculer $|a+b|^2$ en fonction de $|a|^2$, $|b|^2$ et $\bar{a}b$.
b) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$. Montrer que $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ si et seulement si z est réel.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n + (1-i)^n$ est réel

Exercice 5. Dessiner les ensembles déterminés dans le plan complexe par les conditions suivantes :

a) $\lvert z\rvert < 1$	b) $z + \overline{z} = 1$	c) $z - \overline{z} = i$
d) $\lvert z-2\rvert = \lvert z+2\rvert$	e) $z + \bar{z} = z^2$	f) $\lvert z-3+5i\rvert = 4$.

Exercice 6. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} i^k$. Mettre le résultat sous forme cartésienne.

Exercice 7. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$-4, \quad 3i, \quad 2\,e^{-4i}, \quad -8\,e^{\frac{3\pi}{7}i},$$

$$-1+i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \quad (\sqrt{3}-i)^{2013}.$$

Exercice 8. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$(1-i)^{64}, \quad \frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^6}, \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}.$$

Exercice 9. Linéariser les expressions suivantes :

$$\sin^4 x, \quad \cos^5 x, \quad \sin^4 x \cos^3 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos 4a$ en fonction de $\cos a$. Exprimer $\sin 6a$ en fonction de $\sin a$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$, puis $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$. En utilisant le fait que $\cos \frac{5\pi}{10} = 0$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } z^6 = 27i, \quad \text{b) } z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 13. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$4\sqrt{3}+i, \quad 6-8i, \quad 5-12i, \quad 5+12i.$$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } 2z^2 - 4z + 10 = 0, \quad \text{b) } z^2 - 6z + 6 + 4i = 0, \quad \text{c) } z^2 + (2-2i)z = 3i + 1.$$

En utilisant le résultat de c), résoudre sans calcul l'équation $z^2 + (2+2i)z = -3i + 1$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2-1)^4 = 1$.

★ **Exercice 16.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

a) Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$. *Indication : on pourra mettre* $e^{i\frac{\theta}{2}}$ *en facteur.*

b) En déduire le module et un argument de $(1+e^{i\theta})^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

c) Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+bk)}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+bk)$.

★ **Exercice 17.** Soit $n \geq 1$ un entier

a) Pour tout θ réel, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ en fonction de $\sin \frac{\theta}{2}$, $\sin \frac{n\theta}{2}$ et $e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$ puis, pour $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$. Vérifier que cette dernière quantité est toujours un nombre réel positif ou nul.