TD 2: polynômes

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2013-2014, 2ème semestre

Exercice 1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Donner les degrés des polynômes suivants : $P^3 + P^2, \quad P'P, \quad P + XP', \quad P - XP' \quad P + (P'')^2$.

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

a) $A = X^2,\ B = X + 1$
b) $A = X + 1,\ B = X^2 + 1$
c) $A = X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 4,\ B = X^2 - 2$.
d) $A = X^3 + X^2 + X - 1,\ B = X^2 + iX + 1$
e) $A = 2X^5 + 4X^4 - 1,\ B = 2X^3 + 2X + 1$,

Exercice 3. A l'aide d'une division euclidienne, déterminer pour quel réel a le polynôme $P = X^5 + X^4 + aX^2 - 1$ est divisible par $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soient a et b deux nombres complexes *distincts*. Calculer le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 5. Montrer que le polynôme $P = (X+1)^5 - X^5 - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$:
a) en effectuant une division euclidienne ;
b) en utilisant les racines de $X^2 + X + 1$.

Exercice 6. Soient a, b, c, d des nombres complexes, $a \neq 0$ et x_1, x_2 et x_3 les racines du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Que valent les expressions $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1x_2x_3$? On pourra développer l'expression de P en facteurs irréductibles.

Exercice 7. Soit P le polynôme $X^8 + 5X^4 + 4$.
a) Le polynôme P a-t-il des racines réelles ?
b) Déterminer les racines complexes de P. Ecrire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $P = X^4 + (3i - 2)X^3 - (1 + 6i)X^2 + (4 + 3i)X - 2$.
a) En s'inspirant de l'exercice 6, donner le produit et la somme des 4 racines de P (comptées avec leur ordre de multiplicité).
b) Montrer que 1 est racine d'ordre 2 de P.
c) Décomposer P en facteurs irréductibles.

Exercice 9. Soit $P = X^6 - X^5 - 4X^4 - 2X^3 - 11X^2 - X - 6$.
a) Montrer que i est racine de P. Quel est l'ordre de cette racine ?
b) Décomposer P en facteurs irréductibles.

Exercice 10.
a) Décomposer $X^8 - 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
b) Décomposer $X^6 + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11. Montrer que le polynôme $X^7 + \sqrt{3}X^5 - 7$ a une et une seule racine réelle.

Exercice 12. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P soit divisible par P'.

Exercice 13. Soit P, Q et R trois polynômes à coefficients réels vérifiant :

$$P^4 - XQ^4 = XR^2.$$

Montrer que ces trois polynômes sont nuls.

★ **Exercice 14** (Résolution des équations de degré 3)**.**
a) Soit S et P deux nombres complexes. On cherche les solutions (U, V) de

$$UV = P \text{ et } U + V = S. \tag{1}$$

Calculer les coefficients du trinôme $(X - U)(X - V)$ en fonction de U et V, puis résoudre l'équation du second degré ainsi obtenue. En déduire les deux solutions de (1)

Dans la suite de cet exercice, on fixe deux nombres complexes p et q. On cherche à résoudre l'équation, d'inconnue complexe z :

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{2}$$

On notera $D = \frac{4}{27}p^3 + q^2$ et d une racine carrée complexe de D.
b) Soit z une solution de (2). Supposons qu'il existe deux nombres complexes u et v tels que

$$u + v = z, \quad 3uv + p = 0.$$

Montrer que $U = u^3$ et $V = v^3$ sont solutions d'un système de la forme (1). On précisera P et Q. Calculer U et V.
c) En déduire toutes les solutions du système d'inconnue z, u, v :

$$\begin{cases} z^3 + pz + q = 0 \\ u + v = z \\ 3uv + p = 0. \end{cases}$$

On notera $j = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
d) En déduire une formule explicite pour les trois racines du polynômes $X^3 + pX + q$.
e) On suppose p et q réels. Soit $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right) = -27D$ (appelé discriminant du système). Montrer que l'équation (2) admet trois racines réelles distinctes si $\Delta > 0$, trois racines réelles non distinctes si $\Delta = 0$ et une racine réelle et deux complexes conjuguées si $\Delta < 0$.