TD 3: systèmes linéaires

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2013-2014, 2ème semestre

Exercice 1. Dans le Plan P muni d'un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$, on considére les deux droites D_1 et D_2 d'équation respective : $x+2y-4=0$ et $2x-y-3=0$. Déterminer les coordonnées du point A intersection des droites D_1 et D_2. Donner la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite de P passant par A. Retrouver cette forme pour les équations de D_1 et D_2.

Exercice 2. Le plan P est muni d'un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.
a) Déterminer une équation de la parabole passant par les points $A(-2;5)$, $B(-1;-4)$ et $C(1;2)$.
b) Déterminer la forme générale d'une équation d'une parabole passant par les points $A(-2;5)$ et $C(1;2)$.

Exercice 3. Déterminer trois solutions (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $x+2y-3z=1$. Décrire sous forme "paramétrique" l'ensemble des solutions de cette équation.

Exercice 4. , Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes linéaires :

$$(a)\begin{cases} 2x+iy=i \\ 2ix-y=-1. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x-iy=2 \\ ix+2y=-1. \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} (1-i)x & +2y & = & 1-2i \\ (2+i)x & +3iy & = & -i \end{cases}.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y et z :

$$(a)\begin{cases} -5x-y-z=0 \\ 5y+24x+5z=-3 \\ -9x+z=-7 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 7y+5x=3 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-x=1 \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+3y-z=0 \\ -2x+y+7z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} 2x+6y-4z=40 \\ -3x+7y-z=44 \\ x-4y+3z=-41 \\ x+5y+z=2 \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant, d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :
Pour tout j variant de 1 à 3, $\sum_{k=1}^{3}(k+j)x_k=j$.

Matrices, formes réduites

Exercice 7. Donner pour chacune des matrices A_j le système linéaire (S_j) dont A_j est la matrice augmentée. La matrice A_j est-elle sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ? Mettre (si ce n'est pas le cas) A sous forme échelonnée réduite par des opérations élémentaires sur les lignes, puis résoudre (S_j).

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 & -6 & -3 \\ 4 & 8 & 4 & 4 & -8 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -6 & -9 \\ -3 & -6 & -3 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Ecrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants, puis le résoudre à l'aide de la méthode du pivot.

$$(a)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ x+3y+6z+10t=0 \\ x+4y+10z+20t=0,5 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 4x-6y+4z=-1 \\ -6x+14y-11z=3 \\ -x+3y-3z=1 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x+2y-3z=6 \\ 7x+4y-z=22 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} -2x-y=5 \\ -x-z=-1 \\ 2z+y=1 \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4=-2 \end{cases}$$

Exercice 9. Pour chacune des matrices suivantes dire **sans aucun calcul** si le système dont A_j est la matrice augmentée a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

$$\begin{pmatrix} 3 & -14 & -\frac{2}{15} & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 1,1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Systèmes avec paramètres

Exercice 10. Résoudre les systèmes d'inconnues les nombres réels x, y et z et de paramètre le réel m :

$$(a)\quad\begin{cases} x-(m^3-1)y+z=m \\ (m-1)y-(m-2)z=0 \\ (m-2)(m-1)z=m^2-1 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x-my+2z=m \\ y+(m+2)z=m^2-5 \\ 2z=2m-4 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre les systèmes d'inconnues les nombres réels x, y et z et de paramètre le réel m :

$$(a)\quad\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ mx+2my+mz=m+1 \\ x+(m+1)y-5z=5 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x+my+(m-1)z=m+1 \\ 3x+2y+mz=3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x+my+mz=1 \\ mx+y+mz=m \\ mx+my+z=m^2 \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction des paramètres réels a, b et c :

$$(a)\begin{cases} ax+z=2 \\ 2x+5y=1 \\ -2x+y+bz=3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ ax+by+cz=6 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 13. Résoudre le système (non linéaire) d'inconnues les nombres réels x, y, z et t :

$$\begin{cases} tx+y+z-t=0 \\ x+t(y+2)+z-3t=0 \\ x+y+tz=t \end{cases}$$

Systèmes de Cramer.

Exercice 14. le système ci-dessous de second membre quelconque est-il de Cramer ? Si oui, exprimer la solution de ce système.

$$\left\{\begin{array}{lcl} -x+2y-8z & = & a \\ 3x+y+3z & = & b \\ 2x+7z & = & c \end{array}\right. .$$

Exercices à préparer pour le contrôle continue

Exercice 15. Résoudre les systèmes d'équations linéaires :
d'inconnues les nombres réels x_1, x_2 et x_3 pour les deux cas suivants :

$$(a) \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 10 \\ 2x_1+4x_2+8x_3 & = & 1 \\ 3x_1+9x_2+27x_3 & = & 33 \end{array}\right. \qquad (b) \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1+4x_2+x_3 & = & 7 \\ x_1+4x_2-x_3 & = & 13 \\ 2x_1-x_2+2x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

d'inconnues les nombres réels x_1, x_2, x_3 et x_4 pour ces deux derniers cas,

$$(c) \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2+2x_3+x_4 & = & 4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 4 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4 & = & 6 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 & = & 6 \end{array}\right. \qquad (d) \quad \left\{\begin{array}{rcl} 4x_1+3x_2+4x_3-6x_4 & = & 1 \\ -8x_1-6x_2+2x_3-3x_4 & = & 1 \\ -4x_1-3x_2-6x_3+12x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

Exercice 16. Résoudre en fonction des paramètres réels présents, les deux systèmes de trois équations et trois inconnues réelles x, y et z suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} mx+y+z & = & m \\ x+my+z & = & m \\ x+y+mz & = & m \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcc} 2mx-my+z & = & 0 \\ -3x+3y-z & = & 2m \\ 4x+my+3z & = & 4 \end{array}\right. .$$

Exercice 17. Soient λ et a des paramètres réels. On considère le système d'inconnues réelles x, y et z :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{l} x+\lambda y-z=a \\ 2x+\lambda y+z=0 \\ \ \ x+2y+z=1 \end{array}\right.$$

Résoudre (S) et donner en fonction du couple (λ, a) l'ensemble des solutions de (S) .

Exercice 18. le système ci-dessous de second membre quelconque est-il de Cramer ? Si oui, exprimer la solution de ce système.

$$\left\{\begin{array}{lcl} -x+2y-8z & = & a \\ 3x+y+3z & = & b \\ 2x+7z & = & c \end{array}\right. .$$

Exercice 19. Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+\ \ ay+\ \ a^2z & = & 1 \\ x+\ \ by+\ \ \ az & = & a \\ bx+a^2y+a^2bz & = & a^2b \end{array}\right.$$

de trois équations à trois inconnues réelles x, y et z où a et b sont des paramètres réels.

1. A quelle condition portant sur a et b, ce système est-il de Cramer ?
2. Étudier et discuter les solutions de ce système lorsqu'il n'est pas de Cramer.