TD 4: Matrices

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2013-2014, 2ème semestre

Exercice 1. On donne les matrices suivantes :
$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} a & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 3i \\ 5 \\ 2+2i \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & 5 \end{pmatrix}$.
où a et c sont des nombres complexes.
a) Donner les coefficients suivants de la matrice M : $m_{2,3}$, $m_{1,2}$.
b) Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes : $M+N$; $N+P$; $M+{}^tN$
c) Calculer, lorsque c'est possible, les produits suivants : MN ; M^tN ; MP ; PM ; UT ; TU ; $-iN$; $\sqrt{2}T$
d) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer la somme $A+{}^tB$?
e) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer le produit A^tB ?

Exercice 2. Soient les matrices :
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $B_n = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i<j$, $b_{i,j} = i+j$ sinon ;
- $C_n = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ où $c_{i,j} = 0$ si $|i-j|>1$, $b_{i,j} = 1$ sinon,
- $D_n = [d_{i1}]_{1\leq i\leq n}$ où $d_{i1} = x^{i-1}$

1. Ecrire la matrice B_4 et la matrice C_4
2. Calculer les produits AC_3 et ${}^tC_3C_3$
3. Calculer les produits ${}^tC_nC_n$ et $C_n{}^tC_n$

Exercice 3. Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
a) Résoudre l'équation $XC = D$, d'inconnue X.
b) Résoudre l'équation $CX = D$, d'inconnue X.

Exercice 4. Déterminer en fonction de a et b réels toutes les matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, En utilisant l'égalité $A = -2I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en vérifiant que l'on peut utiliser la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 6. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } x \in \mathbb{C}.$$

Exercice 7. On considére les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
Effectuer le produit AB. A et B sont-elles inversibles ?

Exercice 8. Soit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice 3×3 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $R_\theta R_\sigma$ pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$.
b) La matrice R_θ est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

Exercice 9. En utilisant la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ -3x - y + 2z = 2m \\ mx - y - 2z = 4 \end{cases}$$

Discuter en fonction du paramètre m l'inversibilité de la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ m & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'inverse de M dans le cas où $m = 2$.

Exercice 11. Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 1,01 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
A votre avis, quel problème se pose si on calcule l'inverse d'une matrice en remplaçant chacun de ses coefficients par une valeur approchée ?

Exercice 12. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Expliquer pourquoi il existe des nombres réels a_n et b_n et un polynôme $Q_n(X)$ tels que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_n X + b_n$$

   A l'aide des racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$, calculer a_n et b_n.
   On ne cherchera pas à calculer $Q_n(X)$.
3. en déduire le calcul de la matrice A^n.

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 13. Soient A et B deux matrices, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Déterminer B.

Exercice 14. Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$ toutes les matrices 2×2 qui commutent avec $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 6 & -11 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1,5 & 0,5 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2,5 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-elles inversibles ? Donner l'inverse des matrices qui le sont.

Exercice 16. Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer l'inverse de la matrice dans le cas où $m = 0$ puis dans le cas où $m = 1$.

Exercice 17.

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, en réduisant la matrice augmentée $(A|I_3)$ à la forme écheloné simplifiée.
b) Ecrire A^{-1} sous la forme d'un produit $E_1E_2...E_n$, où $E_1, E_2, ...E_n$ sont des matrices élémentaires que vous préciserez.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en fonction des paramètres réls a, b et c le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ -3x + z = b \\ -x + y = c \end{cases}$$

En déduire que la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.