Institut Galilée, université Paris 13
L1, algèbre linéaire 2013/2014 deuxième semestre
TD n^{o}5.

Espaces vectoriels

Exercice 1. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x - 2y + 3z = 0\big\}.$$

1.1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1.2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$(x, y, z) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y, z) = y\,(2, 1, 0) + z\,(-3, 0, 1).$$

1.3. Proposer deux vecteurs qui engendrent F.

Exercice 2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- $F_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\big\}$;
- $F_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = 1\big\}$;
- $F_3 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, xy = 0\big\}$;
- $F_4 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = 0\big\}$;
- $F_5 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = x + y\big\}$;
- $F_6 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, |x + y| = |z|\big\}$;
- $F_7 = \big\{(x, 0, 2x + y) \in \mathbb{R}^3\,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

Exercice 3. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

- $P_x = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = 0\big\}$,
- $P_y = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y = 0\big\}$,
- $P_z = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = 0\big\}$,
- D_x est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{i} = (1, 0, 0)$,
- D_y est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{j} = (0, 1, 0)$,
- D_z est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{k} = (0, 0, 1)$,

3.1. Montrer (au choix) que $P_x \cap P_y = D_z$, que $P_y \cap P_z = D_x$, que $P_z \cap P_x = D_y$.

3.2. Montrer (au choix) que $D_x \oplus D_y = P_z$, que $D_y \oplus D_z = P_x$, que $D_z \oplus D_x = P_y$.

3.3. Montrer (au choix) que $P_x + P_y = \mathbb{R}^3$, que $P_y + P_z = \mathbb{R}^3$, que $P_z + P_x = \mathbb{R}^3$.

3.4. Montrer (au choix) que $P_x \oplus D_x = \mathbb{R}^3$, que $P_y \oplus D_y = \mathbb{R}^3$, que $P_z \oplus D_z = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Dire pour chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ si c'est une famille libre, une famille génératrice et/ou une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\big((-4,-5,-2),(2,2,2),(0,-2,3)\big)$ **b)** $\big((-6,4,-16),(-9,7,-25),(3,-3,9)\big)$

c) $\big((1,0,1),(1,0,2),(0,3,-3),(1,6,-2)\big)$ **d)** $\big((m,-3,-7),(2,3,7),(2,0,m)\big)$,

où m est un paramètre réel.

Exercice 5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

5.1. Comparer les sous-espaces $\mathrm{vect}(\vec{u},\vec{v})$ et $\mathrm{vect}(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$.

5.2. Y-a-t-il un lien entre la nature (libre, liée) de la famille $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ et celle de la famille $(\vec{u},\vec{v})$?

Exercice 6. Soit $\vec{u}_1=(0,-3,1)$, $\vec{u}_2=(-2,-4,1)$, $\vec{u}_3=(3,1,0)$.

6.1. Montrer que $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6.2. Exprimer les coordonnées d'un point (x_1,x_2,x_3) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. On considère le système linéaire (S) suivant :

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-2t & = & 0\\ y-z+t & = & 0\\ x-3y+4z-3t & = & 0\end{array}\right.$$

7.1. Montrer que l'ensemble E des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

7.2. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss. On précisera les variables de base et les variables libres, et on exprimera E à l'aide des variables libres.

7.3. Proposer deux vecteurs qui engendrent E.

Exercice 8. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{u_1}=(3,0,1)$ et $\vec{u_2}=(1,-1,2)$.
Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{v_1}=(5,1,0)$ et $\vec{v_2}=(6,-3,7)$.

8.1. Montrer que $F=G$.

8.2. Montrer que $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,x-5y-3z=0\big\}$.

Exercice 9. On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,z=x+y\big\}\quad\text{et}\quad G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,z=0\big\}.$$

9.1. Montrer que F est engendré par les vecteurs $\vec{u_1}=(1,0,1)$ et $\vec{u_2}=(0,1,1)$.
Montrer que G est engendré par les vecteurs $\vec{v_1}=(1,0,0)$ et $\vec{v_2}=(0,1,0)$.

9.2. Déterminer $H=F\cap G$.
Proposer un vecteur $\vec{w}$ qui engendre H. Exprimer $\vec{w}$ avec $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, puis avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

9.3. Montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, on appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système (S). Donner une base et la dimension de F.

$$(S)\ x_1-3x_2+x_3+4x_4=0,\quad (S)\left\{\begin{array}{r} -4x_1-3x_2+6x_3+2x_4=0\\ -6x_1-8x_2+2x_3+9x_4=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0\end{array}\right.,\quad (S)\left\{\begin{array}{r} x_1+2x_2+5x_3-4x_4=0\\ x_2+x_3-3x_4=0\\ -x_1-3x_3-2x_4=0\end{array}\right.$$

Exercice 11. Soit $\vec{u}=(-2,1,3)$ et $\vec{v}=(1,-1,-2)$. Soit $F=\mathrm{vect}(\vec{u},\vec{v})$.

11.1. Quelle est la dimension de F?

11.2. Fixons $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. A quelle condition sur (x,y,z) le système

$$a\vec{u}+b\vec{v}=(x,y,z),$$

d'inconnues réelles a et b est-il compatible? En déduire une équation cartésienne de F.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F et G définis respectivement par les systèmes linéaires :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

12.1. Trouver deux familles : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ qui engendre F et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ qui engendre G.

12.2. Trouver une équation cartésienne de $F + G$ et donner sa dimension.

Exercice 13. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

13.1. Rappeler une relation entre les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

13.2. Dans chacun des cas suivants donner (avec le moins de calculs possibles) les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E?

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{vect}\Big((-1, 3, 2)\Big)$, $G = \operatorname{vect}\Big((3, -8, 7), (1, -3, 3)\Big)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{vect}\Big((a, 2, 1)\Big)$, $G = \Big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\Big)$, où a est un paramètre réel.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \Big\{(\lambda + 2\mu, 4\lambda - \mu, 3\lambda + 2\mu),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\Big\}$, $G = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\Big\}$.
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \operatorname{vect}\Big((-7, 2, 0, 4), (1, -1, 2, 0)\Big)$. $G = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\Big\}$.

Exercice 14. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((1, 2, 5), (-1, 1, 1), (0, -6, -12)\Big), \quad \mathcal{F}_2 = \Big((1, -2, -3), (2, -5, -7), (1, -3, -3)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((-4, 2), (3, 4), (-1, 2), (2, -6), (2, 2)\Big).$$

Exercice 15. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$):

$$\mathcal{F} = \{(2, -3, 1), (1, 1, 2)\}, \quad \mathcal{G} = \{(1, 4, 0, -2), (0, 2, 3, 4)\}.$$

Exercice supplémentaire. Droite de régression.

Exercice 16. Un comptable examine les ventes, en milliers d'euros, d'une petite entreprise durant les quatre dernières années :

Année	1	2	3	4
Ventes	22	27	30	34

et se demande (problème d'extrapolation) comment estimer les ventes de l'année à venir, l'année 5.

16.1. Représenter graphiquement les ventes y en fonction du temps t. Les points donnés sont-ils alignés ? Tracer une droite $y = \alpha t + \beta$ qui passe "au plus près" de ces points. A partir de ce graphique, donner une estimation des ventes pour l'année 5.
Le but des questions suivantes est de déterminer par le calcul les coefficients de la droite (appelée droite de régression) passant au plus près, en un certain sens, des quatre points donnés.

16.2. Soient des points $(t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3), (t_4, y_4)$ du plan. Montrer que ces points sont alignés si et seulement si le vecteur $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ appartient au sous-espace vectoriel $F = \operatorname{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^4$.
Vérifier que le vecteur $\begin{bmatrix} 22 \\ 27 \\ 30 \\ 34 \end{bmatrix}$ n'appartient pas à $F = \operatorname{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ et retrouver ainsi le fait que les points du plan $(1, 22), (2, 27), (3, 30), (4, 34)$ ne sont pas alignés.

16.3. On considère la quantité, appellée erreur quadratique, $E(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^4 \Big(\alpha + \beta t_i - y_i\Big)^2$, qui représente le carré de la distance entre le point (y_1, y_2, y_3, y_4) de $\mathbb{R}^4$ et un point quelconque $(\alpha + \beta t_1, \alpha + \beta t_2, \alpha + \beta t_3, \alpha + \beta t_4)$ du plan F, α, β étant des paramètres réels.
Trouver les valeurs α, β qui rendent minimale l'erreur $E(\alpha, \beta)$, s'obtient en annulant les dérivées partielles de E par rapport à α et β : $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial E(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & = & 0 \\ \dfrac{\partial E(\alpha,\beta)}{\partial \beta} & = & 0 \end{array}\right.$. Vérifier que ceci peut s'écrire : $\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^4 \Big(\alpha + \beta t_i - y_i\Big) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^4 t_i \Big(\alpha + \beta t_i - y_i\Big) & = & 0 \end{array}\right.$.

16.4. Montrer que les équations ci-dessus forment un système linéaire qui peut s'écrire sous la forme matricielle $Ax = b$,

où l'on a posé $A = {}^tVV$, $b = {}^tVy$, $V = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, et $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ étant l'inconnue.

16.5. Résoudre le système ci-dessus lorsque $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 22 \\ 27 \\ 30 \\ 34 \end{bmatrix}$ et comparer avec les résultats obtenus à la question 16.1.

16.6. Généraliser la méthode ci-dessus à un nombre quelconque de points $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \cdots, (t_n, y_n)$ du plan.

Exercices à préparer pour le contrôle continu.

Exercice 17. Dire pour chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ si c'est une famille libre, une famille génératrice et/ou une base de $\mathbb{R}^4$.

a) $\Big((-2,0,1,1), (2,-2,-2,0), (0,-3,-2,2), (-7,1,4,2)\Big)$

b) $\Big((0,1,1,-1), (-2,-2,-1,1), (4,-2,-3,2)\Big)$

c) $\Big((1,-2,0,1), (-2,2,4,-6), (-9,14,8,-17)\Big)$

d) $\Big((m,1,m,1); (2,m,2,m)\Big)$,

où m est un paramètre réel.

Exercice 18. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? $\mathcal{F} = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})$, $\mathcal{G} = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} - \vec{u})$.

Exercice 19. Soit $\mathcal{B} = \Big((-1,5), (1,-6)\Big)$ et $\mathcal{C} = \Big((-1,1); (-2,3)\Big)$.

19.1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

19.2. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, et (x, y) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 20. En vous inspirant de l'exercice 11, décrire par une équation cartésienne (ou un système d'équations cartésiennes) chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Donner la dimension de ces sous-espaces vectoriels.

$$F_1 = \text{vect}\Big\{(-1,2,3)\Big\}, \quad F_2 = \text{vect}\Big\{(-1,4,1,2), (3,3,2,-1)\Big\},$$
$$F_3 = \text{vect}\Big\{(1,5,2), (-1,-3,-1), (3,5,1)\Big\}, \quad F_4 = \Big\{(-\lambda - 5\mu, \lambda - 3\mu, 2\lambda + 2\mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$

Exercice 21. Soit P le plan défini par $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$, et D la droite de vecteur directeur $\vec{e} = (0,1,2)$.

21.1. Montrer avec le moins de calculs possible que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

21.2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\vec{v} \in P$, $\vec{w} \in D$ tels que $(x,y,z) = \vec{v} + \vec{w}$.