L1, algèbre linéaire
2013/2014
Mathématiques

Université
Paris 13

TD 6 : Applications linéaires

On pourra aussi consulter la feuille d'exercices supplémentaires sur les applications linéaires sur le site :

`http://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement.html}`

Exercice 1. Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires ? Si oui, déterminer leur matrice de représentation dans les bases canoniques de E et F.

a) $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x + y, -3x)$.

b) $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2y, x + y - 1)$.

c) $E = \mathbb{R}^3,\ F = \mathbb{R}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x + 2y - z$.

d) $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x - y, xy)$.

e) $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (2x, -y + 2x, y + x)$.

Exercice 2. Soit :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}' = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}' \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les familles de $\mathbb{R}^3$ définies par $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$.

a) Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

c) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$? Calculer cette matrice dans le cas :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$). Soit $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2)$ et $\widetilde{\mathcal{C}} = (\vec{\tilde{v}}_1, \vec{\tilde{v}}_2, \vec{\tilde{v}}_3)$ donnés par :

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\tilde{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\tilde{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\tilde{v}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\tilde{v}}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que $\widetilde{\mathcal{B}}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont des bases de respectivement $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$, $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}$, $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application dont la matrice de représentation dans les bases canoniques est $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$.

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2,\ f(\vec{u}_2) = 3\vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$.

d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, -x_2)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$

e) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\vec{u}_1) = 2\vec{\tilde{u}}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{\tilde{u}}_1 + 3\vec{\tilde{u}}_2$, $f(\vec{u}_3) = \vec{\tilde{u}}_1 - \vec{\tilde{u}}_3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$.

Exercice 4. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définies par : $f(x, y, z) = (2x + y, x - z)$ et $g(x, y) = (3x - y, 2x, x + 3y)$.
a) Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.
b) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.
c) Déterminer les rangs de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5. Pour toutes les applications de l'exercice **1** qui sont des applications linéaires, déterminer une base de leur image et une base de leur noyau, et leur rang. Ces applications sont-elles injectives ? Surjectives ?

Exercice 6. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 2y + 6z, -2x - 4y - 10z, -y - 2z)$.
a) Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations cartésiennes.
b) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On considère les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$. On note $V \subset \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, et $W \subset \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $C' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$.
a) Montrer que la famille $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base de V, et que $f(V) \subset V$. On note $f_V : V \to V$ l'application linéaire induite par f sur V. Ecrire la matrice de f_V dans la base C.
b) Montrer que la famille $C' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ est une base de W, et que $f(W) \subset W$. On note $f_W : W \to W$ l'application linéaire induite par f sur W. Ecrire la matrice de f_W dans la base C'.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(-1, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ et $(0, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
a) Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$
b) Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ ainsi obtenue forme une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice D de f dans cette nouvelle base.
c) Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Projecteurs)**.** Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit donc de manière unique $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$. La projection (vectorielle) p sur F parallèlement à G est l'application $\vec{u} \mapsto \vec{v}$. La symétrie s par rapport à F et parallèlement à G est l'application $\vec{u} \mapsto \vec{v} - \vec{w}$.

a) Vérifier que p et s sont des applications linéaires. Calculer p^2, s^2 et ps.

On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$, et $D = Vect(\vec{w})$ où $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

b) Former la matrice de p dans la base canonique.

c) En déduire les matrices, dans la base canonique, de q et de s.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation r d'axe orienté par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E, et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que si $V \subset f(V)$ alors $f(V) = V$.

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 12. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 0, 0) = (0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0)$, $f(1, 1, 1) = (1, 1)$. Exprimer $f(x, y, z)$, et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 13. Ecrire la matrice dans la base canonique des applications linéaires suivantes. Déterminer une base du noyau et de l'image de ces applications linéaires :

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.

b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.