L1, algèbre linéaire
2013/2014
Mathématiques

Université
Paris 13

Applications linéaires. Exercices supplémentaires

Révision

Exercice 1. Calculer le rang des applications linéaires suivantes :
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.
b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soit $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la famille définie par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$.
a) Montrer que B' est une base de E, et donner la matrice de passage de B à B'.
b) Former la matrice A' de f dans la base B'.
c) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soit $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la famille définie par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$.
a) Montrer que B' est une base de E et former la matrice D de f dans la base B'.
b) Exprimer la matrice de passage P de B à B', et calculer P^{-1}.
c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1}?
d) Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Approfondissement

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\lambda = A - \lambda I$ admet-elle un noyau non nul?
b) Pour chaque valeur de λ ainsi obtenue, déterminer un vecteur $\vec{v}_\lambda$ tel que $Ker(A_\lambda) = Vect(\vec{v}_\lambda)$.

c) Montrer que la famille de vecteurs ainsi obtenue forme une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice D de f dans cette nouvelle base.
d) Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
a) Rappeler le théorème du rang.
Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.
b) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
c) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.
a) Montrer $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f)$.
b) Montrer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
c) Montrer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
d) En utilisant **b)**, dire si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$ dans les deux cas suivants:
i) $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z, x - 2y + z)$.
ii) $f(x, y, z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note pour tout entier $n \geq 1$,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}, \quad f^0 = \mathrm{Id}_E.$$

a) Montrer que pour $n \geq 0$, $\operatorname{Im}(f^{n+1}) \subset \operatorname{Im}(f^n)$ et $\operatorname{Ker}(f^n) \subset \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.
b) Montrer que la suite $(\mathrm{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(\dim(\operatorname{Ker} f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que ces suites convergent.
c) Déduire de la question précédente qu'il existe $N_0 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \dim \operatorname{Ker}(f^n) = \dim \operatorname{Ker}\left(f^{N_0}\right) \text{ et } \mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}\left(f^{N_0}\right).$$

d) Montrer que pour tout $n \geq N_0$, $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{N_0}$ et $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{N_0}$.
e) Montrer $\operatorname{Im} f^{N_0} \oplus \operatorname{Ker} f^{N_0} = E$.