ALGÈBRE LINÉAIRE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2014-2015

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 pts)**.**
a) Mettre sous forme polaire le nombre complexe $-4+4\sqrt{3}i$.
b) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = -4+4\sqrt{3}i.$$

On exprimera les solutions sous forme polaire.

Exercice 2 (3 pts)**.**
a) Rappeler les formules d'Euler.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(\sin x)^3$ en fonction de $\sin x$ et $\sin 3x$.

Exercice 3 (3 pts)**.** On considère le polynôme :

$$P = X^4 + 6X^2 - 8iX - 3.$$

a) Montrer que i est une racine de ce polynôme, et déterminer son ordre de multiplicité.
b) En effectuant une division euclidienne, déterminer toutes les racines de P et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 4 (4 pts)**.**
a) Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y et z :

$$(S) \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+5y+2z=13 \\ -2x-5y+4z=-9. \end{cases}$$

b) Rappeler la définition d'un système de Cramer. Le système (S) précédent est-il un système de Cramer ?

Date: Mardi 2 avril 2015.

c) On considère maintenant le système

$$(S') \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+5y+2z=11 \\ -2x-5y+4z=-3. \end{cases}$$

Le système (S') est-il un système de Cramer ? Vérifier que $(1,1,1)$ est solution de (S'). Cette solution est-elle unique ?

Exercice 5 (3 pts)**.** Résoudre, en fonction du paramètre réel λ, le système suivant, d'inconnues réelles x, y et z :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} \lambda x+2y+2z=8\lambda+2 \\ -2x-\lambda y+z=2\lambda-4 \\ (\lambda-1)x+y+2z=8\lambda-1. \end{cases}$$

Exercice 6 (4 pts)**.**
a) (Question de cours). Soit A une matrice $p\times n$ et B une matrice $q\times r$. A quelles conditions sur p,n,q,r la matrice ${}^tA+B$ est-elle bien définie ? Même question pour la matrice $C=({}^tA+B)A$. Quelle est la taille de la matrice C quand elle est bien définie ?
b) On considère les matrices

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes :

$$P^2,\ PQ,\ QP,\ Q^2.$$

Donner une relation entre PQ et QP.
c) Soit x et y des nombre réels. Calculer $M=(xP+yQ)^2$ (on pourra utiliser la question précédente). On suppose que M est la matrice nulle. Montrer que x et y sont nuls.
d) Calculer $(PQ)^{1000}$.