ALGÈBRE LINÉAIRE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2014-2015

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours)**.**
a) Soit P un polynôme complexe, $z \in \mathbb{C}$ et k un entier ≥ 1. Donner la définition de "z est racine de P d'ordre k".
b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2.
a) Déterminer les solutions de l'équation $z^2 = 3 + 4i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
b) Déterminer les solutions de l'équation $z^2 + iz - 1 - i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3.
a) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse. *On demande d'indiquer les calculs intermédiaires. Tout résultat, même juste, sans ces calculs, ne sera pas comptabilisé.*
b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire suivant, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} -x - y - 3z = a \\ 3x + 2y + 10z = b \\ -2x - y - 8z = c. \end{cases}$$

Le système (S) est-il un système de Cramer ? A l'aide de la question a), donner, sans calcul supplémentaire, l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 4. Soit

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer B^2.

Date: Mardi 5 mai 2015.

b) Soit $C = B + I_2$. Calculer C^{10} en utilisant la formule du binôme. On justifiera rigoureusement l'utilisation de cette formule.

Exercice 5. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{u}_2 = (3, 1, -5), \quad \vec{u}_3 = (-3, 2, -1).$$

a) La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ? Est-ce une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

b) Soit $E = \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Déterminer une base et la dimension de E.

c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (x, y, z) pour que le système

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = (x, y, z),$$

d'inconnues réelles α et β, soit compatible.

d) Déduire de la question précédente une description cartésienne de $\mathrm{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\vec{e}_1 = (0, -1, 1), \quad \vec{e}_2 = (-1, 0, 2), \quad \vec{e}_3 = (0, 1, 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $\vec{w} = (-5, -3, 10)$. Déterminer les coordonnées (w_1, w_2, w_3) de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x, -6x - y - 3z, 2x + 2z).$$

Donner la matrice de représentation de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) Calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$. En déduire la matrice M de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$ (c'est à dire avec $\mathcal{B}$ comme base de départ et $\mathcal{B}$ comme base d'arrivée).

e) Calculer M^5. À l'aide de la question b), déterminer les coordonnées de

$$f^5(\vec{w}) = (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(\vec{w})$$

dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$$

a) Déterminer une base et la dimension de E.

b) Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + z).$$

Déterminer une base et la dimension du noyau de g.

c) Déduire de la question précédente la dimension de l'image de g. En déduire l'image de g.

d) L'application linéaire g est-elle injective ? surjective ?