TD 1: polynômes, nombres complexes

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2014-2015, 2ème semestre

Rappels : formule du binôme et somme géométrique

On rappelle que le coefficient du binôme $\binom{n}{p}$ est défini pour $0 \leq p \leq n$, p et n entiers, par :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad 0 \leq p < n \Rightarrow \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}. \tag{1}$$

La figure suivante (*triangle de Pascal*) donne le coefficient du binôme $\binom{n}{p}$ à la n-ième ligne, p-ième colonne (les lignes et colonnes sont numérotés à partir de 0), jusqu'à $n = 3$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \tag{2}$$

Exercice 1. Compléter la figure précédente jusqu'à $n = 5$.

On a aussi la formule

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}. \tag{3}$$

Exercice 2.
a) Montrer pour $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
b) Calculer $\binom{20}{3}$, $\binom{100}{98}$.

On rappelle la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 3.
a) Expliciter la formule du binôme dans les cas $n = 2$, $n = 3$.
b) Calculer sans calculatrice $(1001)^4$.

Exercice 4. Montrer pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(indication : $1 - 1 = 0$).

Exercice 5. Montrer par récurrence sur n la formule (3) à partir de la définition (1) des coefficients du binôme.

On rappelle maintenant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6.
a) Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$.
b) Calculer, pour tout entier n : $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$.
c) Calculer, pour tout entier n : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$, puis déterminer la limite de cette quantité quand $n \to \infty$.

Nombre complexes

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si z est un nombre complexe, on note $\operatorname{Re} z$ sa partie réelle et $\operatorname{Im} z$ sa partie imaginaire.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $\operatorname{Re}(iz)$, $\operatorname{Im}(iz)$, $\operatorname{Re}(i\overline{z})$, $\operatorname{Re}(z^3)$, $\operatorname{Im}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$.

Exercice 8. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{2+i}{2-4i}, \quad \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}, \quad \frac{1+2i}{1-3i} + \frac{i}{1+i}.$$

Exercice 9.
a) Soit a et b deux nombres complexes. Calculer $|a+b|^2$ en fonction de $|a|^2$, $|b|^2$ et $\bar{a}b$.
b) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$. Montrer que $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ si et seulement si z est réel. On pourra appliquer la question précédente à $a = \frac{1}{1-iz}$ et $b = \frac{iz}{1-iz}$.

Exercice 10.
a) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$4i, \quad \frac{1}{1-i}, \quad -3e^{-i\pi/5}, \quad 1 - i\sqrt{3}.$$

b) Mettre sous forme cartésienne $(1 - i\sqrt{3})^{2015}$.

Exercice 11. Linéariser les expressions suivantes :

$$\sin^4 x, \quad \cos^5 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $\sin(4a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

b) Exprimer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin(5a)$ en fonction de $\sin a$.

c) En utilisant $\cos(5\pi/10) = 0$ et la question précédente, donner une expression de $\cos \pi/10$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } z^5 = 1, \quad \text{b) } z^4 = 16e^{i\pi/3}, \quad \text{c) } z^6 = 1 + i.$$

Exercice 14. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$5 - 12i, \quad 2(2 + i\sqrt{5}), \quad \sqrt{3} + i.$$

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } z^2 + 2z + 5 = 0, \quad \text{b) } z^2 + (1 + i)z - 2 + 2i = 0, \quad \text{c) } z^2 - 2iz - 5 = 0.$$

Polynômes

Exercice 16. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Donner les degrés des polynômes suivants : $P^3 - P^2$, $P'P''$, $P - XP'$.

Exercice 17. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } A = X^3,\ B = X + 1 \qquad \text{b) } A = X + 1,\ B = X^3 + 2X^2$$
$$\text{c) } A = X^4 + 2iX^3 + 2iX^2 + X + 2,\ B = X^2 + (2i - 1)X + 1.$$

Exercice 18. A l'aide d'une division euclidienne, déterminer pour quels réels a le polynôme $P = X^4 + aX^2 + 1$ est divisible par $Q = X^2 - X + 1$.

Exercice 19.

a) Montrer en effectuant une division euclidienne que le polynôme $P = (X+1)^5 - X^5 - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

b) Calculer les racines de $X^2 + X + 1$. Montrer que ce sont aussi des racines de P. En déduire une autre démonstration du résultat de la question précédente.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soient a et b deux nombres complexes *distincts*. Calculer le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 21. Soit P le polynôme $X^8 + 4X^4 + 3$.

a) Le polynôme P a-t-il des racines réelles ?

b) Déterminer les racines complexes de P et leur ordre de multiplicité.

Exercice 22. Soit $P = X^3 - (1+3i)X^2 + (-3+2i)X + 1 + i$.
a) Montrer que i est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
b) Déterminer toutes les racines de P et leur ordre de multiplicité.

Exercice 23. Donner toutes les racines réelles, puis toutes les racines complexes du polynôme $X^6 - 1$ avec leur ordre de multiplicité.

Exercice 24. Montrer que le polynôme $X^5 + 4X^3 + X - 7$ a une et une seule racine réelle.

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 25.
a) Donner le module et un argument de $1 - i$.
b) Mettre $(1-i)^{17}$ sous forme cartésienne.

Exercice 26. Mettre sous forme cartésienne $\frac{3+i}{1-2i}$ (ou toute autre fraction de 2 nombres complexes sous forme cartésienne).

Exercice 27. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z :

$$a)\ z^4 = -i; \qquad b)\ z^3 = 27.$$

Exercice 28. Linéariser $\cos^4 x$ et $\cos^3 x \sin^2 x$ (ou toute autre produit de puissances de $\cos x$ et $\sin x$).

Exercice 29. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(6a)$ en fonctions de $\cos a$ et $\sin a$.

Exercice 30. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z :

$$a)\ z^4 = -i \qquad b)\ z^3 = 27.$$

Exercice 31. Déterminer toutes les racines du polynômes $X^4 + 4X^3 - 18X^2 + 20X - 7$ avec leurs ordres de multiplicité. On pourra commencer par chercher une racine évidente.

Exercice 32. Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ par $X + 1$ (ou toute autre division euclidienne de polynômes).

Exercice 33. Soit P le polynôme

$$P = X^4 - (1+4i)X^2 - (2+2i)X - 4 - 2i.$$

a) Montrer que $-1 - i$ est une racine de P. Déterminer son ordre de multiplicité.
b) Déterminer toutes les racines complexes de P avec leurs ordres de multiplicité.