TD 3: Matrices

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2014-2015, 2ème semestre

Exercice 1. On donne les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ N = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 3 \\ 5i \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 2 & i+1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

a) Donner les coefficients suivants de la matrice M : $m_{2,3},\ m_{3,2}$.
b) Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes : $M+N$; $N+P$; $T+U$;$T+{}^tU$.
c) Calculer, lorsque c'est possible, les produits suivants :

$$iN\ ;4T\ ;MN\ ;\ M^tN\ ;\ MP\ ;\ PM\ ;\ UT\ ;\ TU\ ;\ \sqrt{2}T.$$

d) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer la somme ${}^tA+B$?
e) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer le produit ${}^tA\,B$?

Exercice 2. Soient les matrices :

- $B_n = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i < j$, $b_{i,j} = j - i$ sinon ;
- $C_n = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ où $c_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$, $c_{i,j} = 1$ sinon.

1. Ecrire la matrice B_4 et la matrice C_4.
2. Calculer les produits B_3C_3. Calculer C_3^2.
3. Calculer les produits C_n^2. On notera $[d_{i,j}]$ les coefficients de C_n^2 et on distinguera les cas $|i-j| > 2$, $|i-j| = 2$, $|i-j| = 1$ et $i = j$.

Exercice 3. Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
a) Résoudre l'équation $XC = D$, d'inconnue X.
b) Résoudre l'équation $CX = D$, d'inconnue X.

Exercice 4. Déterminer en fonction de a et b complexes toutes les matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Exercice 5.
1. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ pour $n \geq 1$.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, En utilisant l'égalité $A = 3I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en vérifiant que l'on peut utiliser la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 6. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 3-4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} z & 3 \\ -2 & z \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 7. On considére la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1/2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^2. La matrice A^2 est-elle inversible ? Et la matrice A ?

Exercice 8. Soit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice 3×3 $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

a) Calculer $R_\theta R_\sigma$ pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$.

b) La matrice R_θ est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^3$. Interpréter géométriquement $R_\theta X$. Les résultats précédents sont-ils cohérents avec cette interprétation géométrique ?

Exercice 9. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant que ces matrices sont des matrices élémentaires, calculer :

$$A^4B^3C \qquad ACBA \qquad C^5A^4.$$

Exercice 10. En utilisant la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 19 \\ 2 & -6 & -18 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x + (4-2m)y + 4z = 0 \\ x + (m-1)y - 3z = 0 \\ -3x + (3-3m)y + 7z = 0 \end{cases}$$

Discuter en fonction du paramètre m l'inversibilité de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4-2m & 4 \\ 1 & m-1 & -3 \\ -3 & 3-3m & 7 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'inverse de M dans le cas où $m = 1$.

Exercice 12. Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 1,01 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
A votre avis, quel problème se pose si on calcule l'inverse d'une matrice en remplaçant chacun de ses coefficients par une valeur approchée ?

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 13. On considère les matrices

$$A = (2i-j)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer, quand c'est possible, les matrices suivantes

$$A^2, \quad C^2, \quad A+B, \quad {}^tA+2B, \quad AC, \quad CA, \quad AB, \quad {}^tAB$$

(ou tout autre somme, produit ou transposée de matrices explicites).

Exercice 14. Soient A et B deux matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer B.

Exercice 15. Déterminer toutes les matrices 2×2 réelles qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & 1-i \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont-elles inversibles ? Donner l'inverse des matrices qui le sont. *(Même question possible avec d'autres petites matrices carrées explicites).*

Exercice 17. Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & m-1 & m+4 \\ 2 & 2m & 2m+5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Dans ces cas, calculer son inverse.