Institut Galilée, université Paris 13
L1, algèbre linéaire 2014/2015 deuxième semestre
TD n^{o}4.

Espaces vectoriels

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, précisez lesquels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

$$F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y \geqslant 0\right\}; \quad F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = 2\right\};$$
$$F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = 0\right\}; \quad F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = x+y\right\};$$
$$F_5 = \left\{(x+1, x+y-2, x-y) \in \mathbb{R}^3\,;\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}; \quad F_6 = \left\{(x, 0, 2x+y) \in \mathbb{R}^3\,;\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 2.

2.1. Soit E l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x+y-2z=0$. Justifier que E est un espace vectoriel.

2.2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E?

$$F_1 = \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La droite F_2 engendrée par le vecteur $\vec{v} = (2,1,3)$.

$$F_3 = \operatorname{vect}\Big((0,2,1),(1,-1,0)\Big), \quad F_4 = \{(\lambda+1, \lambda-1, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3. Soit E défini par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ x+iy-z=0\right\}.$$

3.1. Justifier que E est un espace vectoriel.

3.2. Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation $x+iy-z=0$ sous forme paramétrique.

3.3. Donner deux vecteurs qui engendrent E.

Exercice 4. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

- $P_x = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x=0\right\}$, $P_y = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y=0\right\}$, $P_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z=0\right\}$.
- D_x est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{i} = (1,0,0)$,
- D_y est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{j} = (0,1,0)$,
- D_z est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{k} = (0,0,1)$,

4.1. D_x est-il un sous-espace vectoriel de P_x (respectivement de P_y, de P_z)?

4.2. Montrer (au choix) que $P_x \cap P_y = D_z$, que $P_y \cap P_z = D_x$, que $P_z \cap P_x = D_y$.

4.3. Montrer (au choix) que $D_x \oplus D_y = P_z$, que $D_y \oplus D_z = P_x$, que $D_z \oplus D_x = P_y$.

4.4. Montrer (au choix) que $P_x + P_y = \mathbb{R}^3$, que $P_y + P_z = \mathbb{R}^3$, que $P_z + P_x = \mathbb{R}^3$.

4.5. Montrer (au choix) que $P_x \oplus D_x = \mathbb{R}^3$, que $P_y \oplus D_y = \mathbb{R}^3$, que $P_z \oplus D_z = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Déterminer si chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel E est une famille libre.

5.1. $\Big((3,1,-1),(-1,2,4),(-1,2,3)\Big)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

5.2. $\Big((2,1,3),(-1,4,5),(-10,4,m)\Big)$ dans $E = \mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

5.3. $\Big((1, i, 1+i), (i-1, -1-i, -2)$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

5.4. $\Big((1, 2, i), (4, 4i, 2), (i, 0, 1)\Big)$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

Exercice 6. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles génératrices dans l'esapce vectoriel E indiqué?

6.1. $\Big((1, i), (i, -1), (1+i, i-1)\Big)$ dans $E = \mathbb{C}^2$.

6.2. $\Big((-1, 1, 0), (1, 0, 1)\Big)$ dans $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 0\}$.

Exercice 7. Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$, puis dire si $F \subset G$, $G \subset F$ et/ou $F = G$.

7.1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = 0\}$, $\quad G = \text{vect}\Big((1, 1, 3)\Big)$.

7.2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + z = 0\}$, $\quad G = \text{vect}\Big((1, 1, 0), (2, 1, 0)\Big)$.

7.3. $F = \text{vect}\Big((1, 2, 3), (-1, 2, 0)\Big)$, $\quad G = \text{vect}\Big((1, 6, 6), (-2, 0, -3)\Big)$.

7.4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x + 2y - z/2 = 0 \text{ et } 2x + 2y - z = 0\}$, $\quad G = \text{vect}\Big((-1, 3, 4), (1, 2, -1)\Big)$.

Exercice 8.

8.1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Rappeler une relation entre les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

8.2. Déterminer (avec le moins de calculs possibles) $F \cap G$ et $F + G$ lorsque $E = \mathbb{R}^3$ et F et G sont comme dans la question 7.2 (respectivement comme dans la question 7.4). Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E?

Même question dans les deux cas suivants (on commencera par donner les dimensions de E, F et G):

8.3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}\Big((-3, 8, 4)\Big)$, $G = \text{vect}\Big((1, -3, -2), (-2, 7, 5)\Big)$.

8.4. $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0\Big\}$, $F = \text{vect}\Big((1, 1, -3)\Big)$, $G = \text{vect}\Big((0, -1, 1)\Big)$.

Exercice 9.

9.1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ d'équation cartésienne $x - iy + z = 0$. Donner la dimension et une base de E

9.2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ et $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Donner une base et la dimension de E.

Exercice 10. Soit $\vec{u} = (1, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$ et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

10.1.

1. Quelle est la dimension de F?
2. Fixons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur (x, y, z) le système
$$a\vec{u} + b\vec{v} = (x, y, z),$$
d'inconnues réelles a et b est-il compatible? En déduire une équation cartésienne de F.

10.2. Déterminer par un raisonnement analogue une description cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ vect$(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} = (1, 2, 3, 1)$ $\vec{v} = (2, 3, 5, 1)$.

Exercice 11. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((1, 2, 3), (-1, 5, 4), (-3, 1, -2)\Big), \quad \mathcal{F}_2 = \Big((1, -2, -3), (2, -5, -7), (1, -3, -3)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((-4, 2), (3, 4), (-1, 2), (2, -6), (2, 2)\Big).$$

Exercice 12. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$):

$$\mathcal{F} = \{(1,2,3), (-1,2,4)\}, \quad \mathcal{G} = \{(1,4,0,-2), (1,-1,3,0)\}.$$

Exercice 13. Soit $\vec{u}_1 = (0,-3,1)$, $\vec{u}_2 = (-2,-4,1)$, $\vec{u}_3 = (3,1,0)$.

13.1. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

13.2. Exprimer les coordonnées d'un point (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercices à préparer pour le contrôle continu.

Exercice 14. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-z=0\}, \quad G = \operatorname{vect}\Big((m,1,2)\Big),$$

où $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F+G$. A quelle condition sur m ces deux espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15.

15.1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ d'équation cartésienne $x - iy + z = 0$. Donner la dimension et une base de E

15.2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ et $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Donner une base et la dimension de E.

Exercice 16. Décrire par un système d'équations cartésienne le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ vect$\big((1,2,3)\big)$.

Exercice 17. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((1,2,3), (-1,5,4), (-3,1,-2)\Big), \quad \mathcal{F}_2 = \Big((1,-2,-3), (2,-5,-7), (1,-3,-3)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((-4,2), (3,4), (-1,2), (2,-6), (2,2)\Big).$$

Exercice 18. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$):

$$\mathcal{F} = \{(1,2,3), (-1,2,4)\}, \quad \mathcal{G} = \{(1,4,0,-2), (1,-1,3,0)\}.$$