L1, algèbre linéaire
2014/2015
Mathématiques

Université
Paris 13

# TD 5 : Applications linéaires

On pourra aussi consulter les feuilles d'exercices des années précédentes sur le site :
`http://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement.html}`

**Exercice 1.** Les applications suivantes de $E$ dans $F$ sont elles linéaires ? Si oui, déterminer leur matrice de représentation dans les bases canoniques de $E$ et $F$.
**a)** $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (3x - y, x + 2y).$
**b)** $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x + 2y, 3x + y - 1).$
**c)** $E = \mathbb{C}^3,\ F = \mathbb{C}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = ix + (1 + i)y - 3z.$
**d)** $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x - y, xy).$
**e)** $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (3x, -y + 2x, 2y + x).$

**Exercice 2.** Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0\}$.
**a)** Soit $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (-2, 0, 1)$. Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $E$.
**b)** Soit $(x, y, z) \in E$. Quelles sont les coordonnées de $(x, y, z)$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ?
**c)** Pour $(x, y, z) \in E$, on pose

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, y + z, -x).$$

Montrer que $f$ est une application linéaire de $E$ dans $E$, puis déterminer la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

**Exercice 3.** Soit l'espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x + y = 0\}$.
**a)** Soit $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $E$.
**b)** Soit $f$ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_3$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$ et $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1$. Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
**c)** Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ dans la base $\mathcal{B}$. Donner la matrice de $f$ dans la base canonique.
**d)** Montrer que la formule $g(x, y, z) = (x + z, -(x + z), y)$ définit un endomorphisme de $E$, et écrire la matrice de $g$ dans la base $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $E$.

**Exercice 4.** Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définies par : $f(x, y, z) = (2x + y, x - 2z)$ et $g(x, y) = (x - 2y, 3y, x + 2y)$.
**a)** Déterminer les matrices de $f$ et $g$ dans les bases canoniques.
**b)** Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.
**c)** Mêmes questions avec les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y), \quad g(x, y) = (-2x + 6y, x - 3y).$$

**Exercice 5.** Soit $\vec{u}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-2, 3, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, -2)$, et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
**a)** Monter que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b)** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (27x + 16y + 8z, -34x - 20y - 11z, -16x - 10y - 3z).$$

Déterminer la matrice $A$ de représention de $f$ dans la base $\mathcal{B}$

**c)** Calculer $A^6$. Soit $\vec{v} = (-4, 7, 0)$. Donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f^6(\vec{v})$.

**Exercice 6.**

**a)** Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$. Rappeler une relation entre les dimensions de l'image et du noyau de $f$ et la dimension de $E$.

Donner pour les applications linéaires suivantes une base de l'image et une base du noyau. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? Déterminer si l'image et le noyau de $f$ (respectivement $g$ et $h$) sont supplémentaires.

**b)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (21x - 49y, 9x - 21y)$.

**c)** Les endomorphismes $g$ et $h$ de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 25 \\ -4 & 3 & -11 \\ -4 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

**d)** L'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y) = (x + 2y, x - y, x + y).$$

**Exercice 7.** Pour toutes les applications de l'exercice **1** qui sont des applications linéaires, déterminer une base de leur image et une base de leur noyau, et leur rang. Ces applications sont-elles injectives ? Surjectives ?

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, supplémentaires dans $E$. Tout vecteur $\vec{u}$ de $E$ s'écrit donc de manière unique $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$. La projection $p$ sur $F$ parallèlement à $G$ est l'application $\vec{u} \mapsto \vec{v}$.

**a)** Vérifier que $p$ est une application linéaire. Calculer $p^2$. Donner le noyau et l'image de $p$.

**b)** On note $\vec{u}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$, $\mathcal{B} = \text{vect}\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\big)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**c)** On considère les sous-espaces vectoriels $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_3)$. Justifier que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

**d)** Donner la matrice de $p$ dans la base $\mathcal{B}$.

**e)** Donner la matrice de $p$ dans la base canonique.