ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE: CORRECTION AU PARTIEL N°1

Exercice 1.

a) On veut résoudre :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} x - y - z = \lambda - 1 \\ 2x - y - z = 2\lambda - 1 \\ x + y + (\lambda + 4)z = 2\lambda + 4. \end{cases}$$

On commence par échelonner le système. Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$ puis $(L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2)$, on obtient que (S_λ) est équivalent au système suivant

$$(S'_\lambda) \qquad \begin{cases} x - y - z = \lambda - 1 \\ y + z = 1 \\ (\lambda + 3)z = \lambda + 3. \end{cases}$$

1er cas : $\lambda \neq -3$. On peut diviser la troisième ligne de (S'_λ) par $\lambda + 3$. Le système (S) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x - y - z = \lambda - 1 \\ y + z = 1 \\ z = 1, \end{cases}$$

ce qui donne, par les opérations $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2)$ et $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_3)$, $x = \lambda$, $y = 0$ et $z = 1$. La seule solution dans ce cas est $(\lambda, 0, 1)$.

2ème cas : $\lambda = -3$. La troisième ligne de (S'_λ) se lit $0 = 0$. Le système (S_λ) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ y + z = 1, \end{cases}$$

Après l'opération $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2)$, et en prenant z comme paramètre et x et y comme variables de base, on obtient que l'ensemble des solutions est dans ce cas :

$$\Big\{(-3, 1 - t, t),\ t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

b) Un système linéaire est un système de Cramer quand il a autant d'inconnues que d'équation, et une unique solution.

c) D'après **a)**, le système (S_λ) est de Cramer si et seulement si $\lambda \neq -3$.

Exercice 2.

Date: 2016.

a) Le produit AB est défini si et seulement si $p = q$. C'est alors une matrice $n \times r$, dont les coefficients $c_{i,j}$ sont donnés par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq r.$$

b) $B+C$ et AB ne sont pas définis. Les 4 autres matrices sont définies. On a :

$${}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad {}^tB + 2C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$
$$BC = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.

a) On utilise la méthode du pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (L_1) \leftrightarrow (L_2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_2) + 3(L_1) \\ (L_3) + 2(L_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \quad (L_3) + (L_2) .$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -2 & -9 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_1) - 2(L_3) \\ (L_2) - 2(L_3) \end{array} .$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \quad (L_1) - 3(L_2) .$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -(L_2) \\ -(L_3) \end{array} .$$

On a montré que M était inversible, d'inverse : $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

b) En notant

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{et } E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

le système s'écrit $MX = E$. Son unique solution est donc $X = M^{-1}E$, ce qui donne $x = a + 12b + 4c, \quad y = a + 7b + 2c, \quad z = -a - 5b - c$.

Exercice 4. Soit $P = X^4 - 2X^3 - 10X^2 + 6X + 45$.

a)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -2X^3 & -10X^2 & +6X & +45 & X^2 - 6X + 9 \\
\hline
-X^4 & +6X^3 & -9X^2 & & & X^2 + 4X + 5 \\
& 4X^3 & -19X^2 & +6X & +45 & \\
& -4X^3 & +24X^2 & -36X & & \\
& & 5X^2 & -30X & +45 &
\end{array}$$

Le quotient est $X^2 + 4X + 5$. Le reste est 0.

b) D'après la question précédente, $P = (X^2 + 4X + 5)(X^2 - 6X + 9)$. De plus, le discriminant du trinôme $X^2 + 4X + 5$ vaut -4, ce trinôme n'a donc pas de racine réel. Puisque $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$, on en déduit que P a pour seul racine réelle 3, et que c'est une racine double.

c) $X^2 + 4X + 5$ a pour racines complexes conjuguées $-2 - i$ et $-2 + i$. P a donc pour racines complexes 3 (racine double), $-2 - i$ et $-2 + i$ (racines simples).

Exercice 5. Soit F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On veut montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, le vecteur nul $\vec{0}_E$ est un élément de F et un élément de G. Donc $\vec{0}_E \in F \cap G$.

Soit $\vec{x}$, $\vec{y}$ des éléments de $F \cap G$. En particulier, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des éléments de F. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit $\vec{x} + \vec{y} \in F$. De même, $\vec{x} + \vec{y} \in G$, ce qui montre $\vec{x} + \vec{y} \in F \cap G$.

Supposons maintenant $\vec{x} \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\vec{x} \in F$ (car $\vec{x} \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E) et de même $\lambda\vec{x} \in G$. On a donc bien $\lambda\vec{x} \in F \cap G$, ce qui conclut la preuve que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.